■ 高等学校教材

Mathematical Modeling and Mathematical Experiments

数学建模与数学实验

（第3版）

（附光盘一片）

■ 主　编　赵　静　但　琦
■ 副主编　严尚安　杨秀文



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



ISBN 978-7-04-022696-6

9 787040 226966 >

定价 31.30 元

高等学校教材

数学建模与数学实验

Mathematical Modeling and Mathematical Experiments

（第3版）

主　编　赵　静　但　琦
副主编　严尚安　杨秀文



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书第1版于2000年由高等教育出版社和施普林格出版社出版，经过修改于2003年再版，反响良好，被多所学校数学建模与数学实验课程或大学生数学建模竞赛辅导作为教材选用。

本书集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体，注重数学建模思想介绍，重视数学软件在实际中的应用。在这次修订中增加了习题答案，修改了第3章的线性规划的内容，并增加了LINGO解线性规划内容。第3版同样附上了教学光盘，光盘中包含本书的全部源程序和课堂教学的PowerPoint幻灯片。

本书可作为理工科院校本科数学建模、数学实验课程的教材，也可作为数学建模竞赛的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验/赵静，但琦主编.—3版.—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022696-6

Ⅰ.数… Ⅱ.①赵…②但… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材②高等数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.O141.4 O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第182398号

策划编辑 宋瑞才　责任编辑 兰莹莹　封面设计 王凌波　责任绘图 郝　林
版式设计 张　岚　责任校对 殷　然　责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2000年11月第1版
开　　本	787×1092　1/16		2008年1月第3版
印　　张	23.75	印　　次	2008年1月第1次印刷
字　　数	580 000	定　　价	31.30元（含光盘）

物料号　22696-00

第3版前言

本书第1版于2000年由高等教育出版社和施普林格出版社出版。第2版于2003年出版。现在第3版在第2版的基础上作了以下改进:

第一,根据教学的实际需要,给出了每章后面的习题答案;

第二,修改了第3章线性规划的内容,并增加了LINGO解线性规划;

第三,修改并丰富了部分例子,使内容更丰富。

第3版同样附上了教学光盘,光盘中包含本书的全部源程序和课堂教学的PowerPoint幻灯片。教师可直接用于课堂教学,对学生课外自学和复习也大有帮助。每章后面的习题答案可以帮助教师和学生。

本书编写的具体分工如下:赵静撰写第1、11、13、15、17章及全书MATLAB编程;但琦撰写第9、10章;严尚安撰写第16章;杨秀文撰写第12、14章;吴松林、蒋银华撰写第3章;余建民撰写第4、7章;付诗禄撰写第5、6、18章;蒋继宏撰写第8章;赵静、但琦共同撰写第2章。但琦完成第1、2、9、10章的习题答案,吴松林完成第3、15、16、17章的习题答案,杨秀文完成第11、12、13、14章的习题答案,余建民完成第4、7章的习题答案,付诗禄完成第5、6、18章的习题答案,蒋继宏完成第8章的习题答案。本书光盘由赵静、杨秀文、付诗禄、吴松林共同编写。但琦负责第3版的统稿和协调。赵静、严尚安负责全书质量把关;但琦、杨秀文负责组织协调工作。

本书由重庆交通大学汪达成教授担任主审。数学教研室许多同志提出了宝贵的意见,在此深表谢意。

本书可作为工科院校本科数学建模课、数学实验课或数学建模竞赛培训的教材,也可作为应用数学知识方面的参考书。

编　者

2007年6月

第2版序

一提起数学，人们首先想到的是它的抽象和难懂，以及它的严密的推理和证明。抽象的理论，固然是数学的一个重要方面；但不可否认的是，数学还有另一个重要方面，那就是其广泛的应用性。数学从一开始就是为了实际运用的需要而产生的，数学的很多重大发现（比如微积分）是顺应实际运用的需要而出现的。当然，也有大量的数学成果是来源于解决数学自身提出的问题的努力，这些成果也许不能立即转化成生产力，应用于当时社会实际，但有可能多年以后发现它们有很大的实际效用。随着社会的发展、科学技术的更新，数学的应用越来越广泛。特别是计算机技术的飞速发展和广泛应用，更促使了数学的越来越广泛深入的应用。在这样的形势下，学校的数学教育，就不能还是按照传统的模式，教师靠粉笔和黑板传授知识，学生靠纸和笔学习知识。数学教学要联系实际应用，要与计算机结合起来，学生不只靠听课和看书接受数学知识，而且要自己动手，借助于计算机，尝试数学的应用，以便在毕业之后能更快更好地适应社会的需要。数学建模和数学实验课程的开设，数学建模竞赛活动的开展，也就适应这一社会需求应运而生了。

数学怎样用来解决实际问题？首先需要用数学的语言来描述实际问题，将它变成一个数学问题，利用现成的数学工具或发展新的数学工具来加以解决。将实际问题变成数学问题的这个过程，就是数学建模。实际上，从数学一开始产生，就是不断在进行数学建模。但是，即使在十年以前，数学建模这个词对于大多数大学生甚至大学教师来说还是陌生的、感觉遥远的。那时我国还只有少数大学在尝试开设数学模型课，开始参加美国的大学生数学建模竞赛。只经过了短短十年，数学建模竞赛已经在全国各高校广泛开展起来，声势浩大，数学建模也随之而广为人知。当然，竞赛只是一种手段，一种形式，而不是目的。但正是通过这种手段和形式，一批又一批大学生受到了培养和锻炼，他们体验了建立数学模型解决实际问题的全过程，体验了合作，体验了创造的艰苦和欢乐，体验了如何使用计算机为解决问题服务，体验了如何将自己的成果写成论文以有利于获得承认和采纳，等等。参加过竞赛的学生普遍感到，得到的收获远不是一张奖状所能表达的。而当他们进入社会之后，竞赛的效果更加显现出来，参加竞赛的经验对于他们适应社会的需要起到了巨大的作用。我们反对应试教育而提倡素质教育。数学建模竞赛也是在"应试"，但这样的"应试"所产生的效果，至少在目前看来，是大大有利于学生素质的培养和提高的。这说明，问题不在于是不是有考试这个指挥棒，而在于这个指挥棒指向何方。除了对学生的锻炼和培养外，通过数学建模竞赛，在全国各高校还都形成了一支教练队伍，他们成为推动数学走向应用的一支生力军。本书的作者们就是这样，他们是后勤工程学院的一批年轻教员，他们开设数学建模课程，从1994年起开始带领本校学生参加全国大学生数学建模竞赛，并取得了优异的成绩。他们既培养了学生，也提高了自己，在数学教育和应用方面积累了丰富的经验。本书就是这一经验的结晶。本书的前身是数学建模与数学实验讲义，1997年由后勤工程学院出版，沿用至今，效果良好。经过进一步修改加工成为本书。

本书的题目是"数学建模与数学实验"。数学实验是近几年才在我国大学中开设的一门课程，对于它的宗旨和具体做法，大家都处于摸索阶段，还没有形成一个统一的模式。我以为，不应

当过早形成统一的模式，而应当鼓励各种不同模式进行试点和探索。但大体统一的是：数学实验既然是实验，就不应当以老师传授知识为主，而应当以学生自己动手为主。还有一点，数学实验的主要实验"仪器"是计算机，数学实验就是要让学生利用计算机来学习和应用数学知识。本书的特点是将数学知识、数学实验与数学建模结合起来，在数学实验中强调如何利用计算机及其软件来求解数学模型。书中既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识，又联系实例介绍应用相应的数学知识建立数学模型，并用合适的数学软件包（主要是 MATLAB 软件包）进行求解。在大多数章的最后一节，结合相应知识和软件包介绍一个大型的、综合的数学建模案例，这些案例主要取材于最近几年全国大学生数学建模竞赛题。这样的选材和组织，使本书很实用，既适用于作为工科院校数学建模课、数学实验课和数学建模竞赛培训教材，也可作为应用数学知识及软件使用方面的易于入门的参考书。

李尚志
中国科学技术大学数学系
2003 年 4 月

第2版前言

在面向21世纪的工科数学教学改革中，许多高校对工科数学的教学内容和课程体系进行了一系列的改革尝试，并开设了数学建模或数学实验课程。全国大学生数学建模竞赛活动也开展了多年。随着改革的深入，数学实验课程的重要性日益显著。在全国高等学校工科数学课程指导委员会的关于工科数学系列课程教学改革的建议中，指出微积分、几何与代数、概率与统计、数学实验是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础。

数学实验就是运用现代计算机技术和软件包来进行数学模型的求解。数学实验课应该是数学建模教学过程中必不可少的一个实践性环节，开设数学实验课是工科数学教学改革的进一步深入和延续，对于推进高等院校数学课程教学内容和课程体系的改革，培养学生具有解决实际问题的能力和创造精神，均会起到积极的作用。

本书集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体。既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识，又联系实例介绍应用相应的数学知识建立数学模型，并用合适的数学软件包（本书主要用MATLAB软件包）来求解模型。在大多数章的最后一节，结合相应知识和软件包介绍一个大型的数学建模案例，这些案例主要取材于最近几年全国大学生数学建模竞赛题。与其他数学建模教材和数学实验课教材相比，本教材更注重应用数学知识以及软件的使用。

本书的作者均是后勤工程学院数学建模教练，他们从1994年开始带领学生参加全国大学生数学建模竞赛，取得了优秀的成绩，积累了丰富的经验。将这些年来在数学建模培训中的讲稿经过不断的补充和完善，编写成了讲义《数学建模与数学实验》，自1997年在后勤工程学院和重庆市一些高校陆续使用，教练员和学生反映良好，并且在数学建模培训中起到了很好的作用。本书第1版是在原讲义的基础上进一步修改而成，于2000年由高等教育出版社和施普林格出版社出版。现在的第2版在第1版的基础上作了以下改进：

第一，根据教学的实际需要，增加了两章内容（即第1章——数学建模简介和第2章——MATLAB入门）；

第二，第1版使用的是MATLAB 5.3版，第2版采用了最新的MATLAB 6.3版。6.3版的功能更强大，使用更方便，尤其是其优化工具箱有很大的改进；

第三，补充了例子，使内容更丰富；

第四，第2版附上了教学光盘，光盘中包含本书的全部源程序和适用于课堂教学的PowerPoint幻灯片。教师可直接用于课堂教学，对学生课外自学和复习也大有帮助。

本书编写的具体分工如下：赵静撰写第1、11、13、15、17章及全书MATLAB编程；但琦撰写第9、10章；严尚安撰写第16章；杨秀文撰写第12、14章；蒋银华撰写第3章；余建民撰写第4、7章；付诗禄撰写第5、6、18章；蒋继宏撰写第8章；赵静、但琦共同撰写第2章。本书所附教学光盘由赵静、杨秀文、付诗禄共同研制，余文革、吴松林也做了部分工作。赵静、严尚安负责全书质量把关；但琦、杨秀文负责组织协调工作。

本书由重庆交通学院汪达成副教授担任主审。后勤工程学院马凡柯副教授、数学教研室许

多同志为本书编写提出了宝贵的意见,在此深表谢意。

本书可作为工科院校本科数学建模课、数学实验课或数学建模竞赛培训的教材,也可作为应用数学知识方面的参考书。

编　者

2003年6月

目　　录

第 1 章　数学建模简介

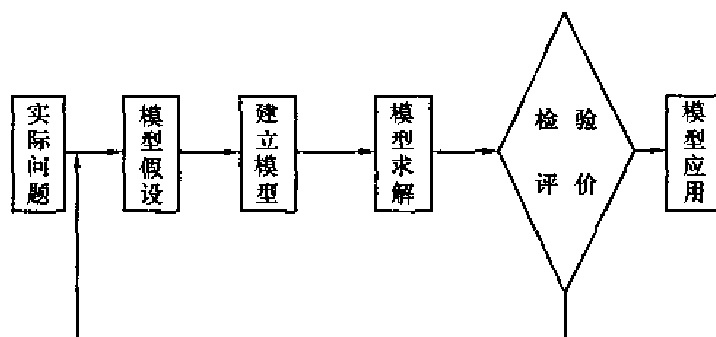
1.1　关于数学建模

所谓数学模型，是关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构. 简言之，数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述.

数学建模就是构造数学模型的过程，即用数学的语言 —— 公式、符号、图表等刻画和描述一个实际问题，然后经过数学的处理 —— 计算、迭代等得到定量的结果，以供人们作分析、预报、决策和控制.

在对实际问题建立数学模型时，需要解决的问题往往涉及众多的因素，这就需要分清问题的主要因素和次要因素，恰当地抛弃次要因素，提出合理的假设，建立相应的数学模型，并用相应的数学方法(或现有软件)求解模型，然后将所得的解与实际问题作比较，找出存在的差距和原因，对问题作进一步的分析，提出新的假设，逐步修改完善模型，使问题得到更好的解决.

上述数学建模过程可用流程图表述如下：



数学建模是一个实践性很强的学科，它具有以下特点：

1. 涉及广泛的应用领域，如物理学、力学、工程学、生物学、医学、经济学、军事学、体育运动学等. 而不少完全不同的实际问题，在一定的简化层次下，它们的模型是相同或相似的. 这就要求我们培养广泛的兴趣，拓宽知识面，从而发展联想能力，通过对各种问题的分析、研究、比较，逐步达到触类旁通的境界.

2. 需要灵活运用各种数学知识. 在数学建模过程中，数学始终是我们主要的工具. 要根据实际问题的需要，灵活运用各种数学知识如微分方程、运筹学、概率统计、图论、层次分析、变分法等，去描述和解决实际问题. 这要求我们既要加深数学知识的学习，更要培养应用已学到的数学方法和思想进行综合应用和分析，进行合理的抽象及简化的能力.

3. 需要各种技术手段的配合，如查阅各种文献资料、使用计算机和各种数学软件包等.

4. 建立一个数学模型与求解一道数学题目有极大的差别. 求解数学题目往往有唯一正确的

答案，而数学建模没有唯一正确的答案. 对同一个实际问题可能建立起若干不同的模型，模型无所谓“对”与“错”，评价模型优劣的唯一标准是实践.

5. 建立的数学模型与建模的目的有关. 对同一个实际对象，建模目的之不同导致建模的侧重点和出发点也不同.

因此，对一个实际问题而言，数学建模没有确定的模式，它与问题的性质、建模目的、建模者自身的数学素质有关，甚至还与建模者的灵性有关. 经验、想象力、洞察力、判断及直觉、灵感在建模过程中起着与数学知识同样重要的作用. 数学建模是一门科学，它更是一门艺术. 要成为一名出色的艺术家，需要大量的观摩和前辈的指导，更需要亲身的实践. 同样，要掌握数学建模这门艺术，既要学习、分析、评价、改进别人做过的模型，更要亲自动手，认真做一些实际题目.

1.2 数学建模实例：人口预报问题

这里介绍一个建立人口预报数学模型的实例，希望读者从中体会数学建模的过程.

1. 问题

人口问题是当前世界上人们最关心的问题之一. 认识人口数量的变化规律，作出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提. 下面介绍两个最基本的人口模型，并利用表 1－1 给出的近两百年的美国人口统计数据，对模型做出检验，最后用它预报 2000 年、2010 年的美国人口.

表 1－1 美国人口统计数据

年(公元)	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口(百万)	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年(公元)	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口(百万)	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5
年(公元)	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口(百万)	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

2. 指数增长模型(马尔萨斯人口模型)

此模型由英国人口学家马尔萨斯(Malthus，1766—1834)于 1798 年提出.

(1) 假设：人口增长率 r 是常数(或单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比).

(2) 建立模型：记时刻 $t=0$ 时人口数为 x_0，时刻 t 的人口为 $x(t)$，由于量大，$x(t)$ 可视为连续、可微函数. t 到 $t+\Delta t$ 时间段内人口的增量为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t)$$

于是 $x(t)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx \\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{1}$$

(3) 模型求解：解微分方程(1)，得

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{2}$$

表明:$t \to \infty$ 时,$x(t) \to \infty$ $(r > 0)$.

(4) 模型的参数估计:

要用模型的结果(2)来预报人口,必须对其中的参数 r 进行估计,这可以用表 1-1 的数据通过拟合得到. 拟合的具体方法见本书第 16 章或第 18 章.

通过表中 1790—1990 年的数据拟合得:$r = 0.307$.

(5) 模型检验:

将 $x_0 = 3.9, r = 0.307$ 代人公式(2),求出用指数增长模型预测的 1810—1920 年的人口数,见表 1-2.

表 1-2 美国实际人口与按指数增长模型计算的人口比较

年(公元)	实际人口(百万)	指数增长模型	
		预测人口(百万)	误差(%)
1790	3.9		
1800	5.3		
1810	7.2	7.3	1.4
1820	9.6	10.0	4.2
1830	12.9	13.7	6.2
1840	17.1	18.7	9.4
1850	23.2	25.6	10.3
1860	31.4	35.0	10.8
1870	38.6	47.8	23.8
1880	50.2	65.5	30.5
1890	62.9	89.6	42.4
1900	76.0	122.5	61.2
1910	92.0	167.6	82.1
1920	106.5	229.3	115.3

从表 1-2 可看出,1810—1870 年间的预测人口数与实际人口数吻合较好,但 1880 年以后的误差越来越大.

分析原因,该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长. 而事实上,随着人口的增加,自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著. 如果当人口较少时人口的自然增长率可以看作常数的话,那么当人口增加到一定数量以后,这个增长率就要随着人口增加而减少,于是应该对指数增长模型关于人口净增长率是常数的假设进行修改. 下面的模型是在修改的模型中较著名的一个.

3. 阻滞增长模型(logistic 模型)

(1) 假设:

(a) 人口增长率 r 为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$(减函数),最简单地可假定 $r(x) = r - sx, r, s >$

0（线性函数），r 叫做固有增长率.

(b) 自然资源和环境条件年容纳的最大人口容量为 x_m.

(2) 建立模型：

当 $x = x_m$ 时，增长率应为0，即 $r(x_m) = 0$，于是 $s = \frac{r}{x_m}$，代入 $r(x) = r - sx$，得

$$r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式得

$$\text{模型：}\begin{cases}\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x \\ x(0) = x_0\end{cases} \tag{4}$$

(3) 模型的求解：

解方程(4)，得

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}} \tag{5}$$

根据方程(4)作出 $\frac{dx}{dt} - x$ 曲线图，见图1-1，由该图可看出人口增长率随人口数的变化规律. 根据结果(5)作出 $x - t$ 曲线，见图1-2，由该图可看出人口数随时间的变化规律.

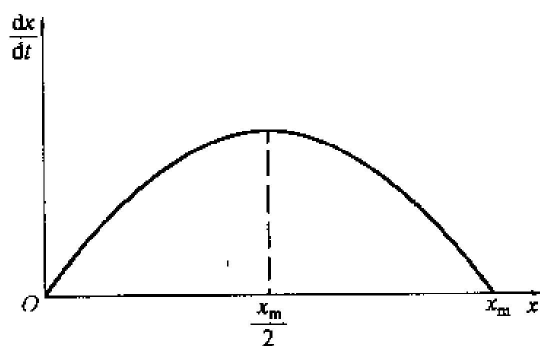


图1-1　$\frac{dx}{dt} - x$ 曲线图

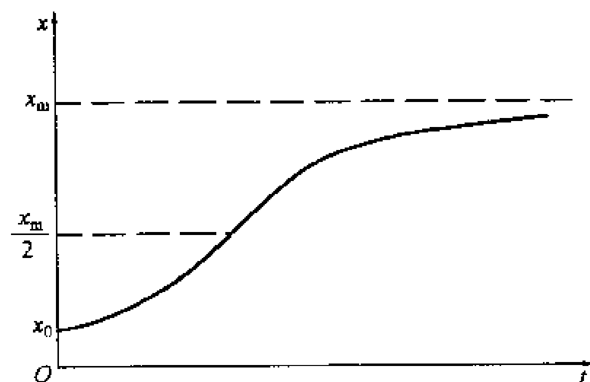


图1-2　$x - t$ 曲线图

(4) 模型的参数估计：

利用表1-1中1790—1990年的数据对 r 和 x_m 拟合得：$r = 0.2072$，$x_m = 464$.

(5) 模型检验：

将 $r = 0.2072$，$x_m = 464$ 代入公式(5)，求出用指数增长模型预测的1800—1990年的人口数，见表1-3第3、4列.

也可将方程(4)离散化，得

$$x(t+1) = x(t) + \Delta x = x(t) + r\left[1 - \frac{x(t)}{x_m}\right]x(t), \quad t = 0,1,2,\cdots \tag{6}$$

用公式(6)预测1800—1990年的人口数，结果见表1-3第5、6列.

表 1－3　美国实际人口与按阻滞增长模型计算的人口比较

年（公元）	实际人口（百万）	阻滞增长模型			
		公式(5)		公式(6)	
		预测人口（百万）	相对误差	预测人口（百万）	相对误差
1790	3.9				
1800	5.3	5.902 5	0.113 7	3.900 0	0.264 2
1810	7.2	7.261 4	0.008 5	6.507 4	0.096 2
1820	9.6	8.933 2	0.069 5	8.681 0	0.095 7
1830	12.9	10.989 9	0.148 1	11.415 3	0.115 1
1840	17.1	13.520 1	0.209 4	15.123 2	0.115 6
1850	23.2	16.632 8	0.283 1	19.819 7	0.145 7
1860	31.4	20.462 1	0.348 3	26.522 8	0.155 3
1870	38.6	25.173 1	0.347 8	35.452 8	0.081 5
1880	50.2	30.968 7	0.383 1	43.532 9	0.132 8
1890	62.9	38.098 6	0.394 3	56.188 4	0.106 7
1900	76.0	46.869 9	0.383 3	70.145 9	0.077 0
1910	92.0	57.660 7	0.373 3	84.730 5	0.079 0
1920	106.5	70.935 9	0.333 9	102.462 6	0.037 9
1930	123.2	87.267 4	0.291 7	118.950 9	0.034 5
1940	131.7	107.358 8	0.184 8	137.881 0	0.046 9
1950	150.7	132.075 9	0.123 6	148.797 8	0.012 6
1960	179.3	162.483 5	0.093 8	170.276 5	0.050 3
1970	204.0	199.891 9	0.020 1	201.177 2	0.013 8
1980	226.5	245.912 7	0.085 7	227.574 8	0.004 7
1990	251.4	302.528 8	0.203 4	250.448 8	0.003 8

（6）模型应用：

现应用该模型预测人口．用表 1－1 中 1790—1990 年的全部数据重新估计参数，可得 $r = 0.2083, x_m = 457.6$．用公式(6)作预测得：

$$x(2000) = 275, \quad x(2010) = 297.9$$

也可用公式(5)进行预测．

1.3　数学建模论文的撰写方法

当参加数学建模竞赛时，竞赛论文是评价小组建模工作的唯一依据．而竞赛要求在三天时间内完成建模的所有工作，包括论文写作．因此论文写作的时间是非常紧迫的，在赛前有意识地进行论文写作的训练是非常必要的，一方面可增强良好的掌握时间节奏的能力；另一方面也可以熟悉建模论文各部分内容的写作方法．

在写作论文时,建模小组的各成员应齐心协力,既要各司其职,又要通力合作.要做到这一点,必须将整个建模工作加以分解,理清各部分工作的并行或先后顺序关系以及在整个工作中的地位和作用.负责各部分工作的成员,应将自己的工作完整地记录下来.小组内应有一个主笔人,负责对文章的整体把握,其工作包括拟制写作提纲和论文的最后写作.提纲写出来后,应先在小组内讨论、修改和确定,然后再开始正式写作.论文写出来后,小组内其他成员必须参与论文的检查和修改工作,这一方面是因为每个成员可以检查一下自己的工作是否都被准确地表达出来了;另一方面因为习惯性思维,主笔人一般不容易检查出自己的错误.

数学建模竞赛章程规定,对论文的评价应以"假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰性"为主要标准.所以,在论文中应努力反映出这些特点.

下面,我们简单介绍数学建模论文的主要组成部分及各部分内容的撰写方法.

1. 题目

论文题目是一篇论文给出的涉及论文范围及水平的第一个重要信息.要求简短精练、高度概括、准确得体、恰如其分.既要准确表达论文内容,恰当反映所研究的范围和深度,又要尽可能概括、精练.

2. 摘要

摘要是论文内容不加注释和评论的简短陈述,其作用是使读者不阅读论文全文即能获得必要的信息.在数学建模论文中,摘要是非常重要的一部分.数学建模论文的摘要应包含以下内容:所研究的实际问题、建立的模型、求解模型的方法、获得的基本结果以及对模型的检验或推广.论文摘要需要用概括、简练的语言反映这些内容,尤其要突出论文的优点,如巧妙的建模方法、快速有效的算法、合理的推广等.一般科技论文的摘要要求不列举例证,不出现图、表和数学公式,不自我评价,且字数应在200以内.前几年,全国大学生数学建模竞赛要求摘要字数应在300字以内.但从2001年开始,为了提高论文评选效率,要求将论文第一页全用作摘要,对字数已无明确限制.故在摘要中也可适当出现反映结果的图、表和数学公式.

3. 问题重述

数学建模比赛要求解决给定的问题,所以论文中应叙述给定问题.撰写这部分内容时,不要照抄原题,应把握住问题的实质,再用较精练的语言叙述问题.

4. 模型假设

建模时,要根据问题的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,对问题进行必要的简化,做出一些合理的假设.模型假设部分要求用精练、准确的语言列出问题中所给出的假设以及为了解决问题所做的必要、合理的假设.假设作得不合理或太简单,会导致错误的或无用的模型;假设做得过分详尽,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使工作很难或无法继续下去,因此常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中.

5. 分析与建立模型

根据假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,得到一个数学结构.建模时应尽量采用简单的数学工具,使建立的模型易于被人理解.在撰写这一部分时,对所用的变量、符号、计量单位应作解释,特定的变量和参数应在整篇文章保持一致.为使模型易懂,可借助于适当的图形、表格来描述问题或数据.

6. 模型求解

使用各种数学方法或软件包求解数学模型. 此部分应包括求解过程的公式推导、算法步骤及计算结果. 为求解而编写的计算机程序应放在附录部分. 有时需要对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏度分析等.

7. 模型检验

把求解和分析结果翻译回到实际问题,与实际的现象、数据比较,检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符,问题常出在模型假设上,应该修改、补充假设,重新建模. 这一步对于模型是否真的有用十分关键.

8. 模型推广

将该问题的模型推广到解决更多的类似问题,或讨论给出该模型的更一般情况下的解法,或指出可能的深化、推广及进一步研究的建议.

9. 参考文献

在正文中提及或直接引用的材料或原始数据,应注明出处,并将相应的出版物列举在参考文献中. 需标明出版物名称、页码、著者姓名、出版日期、出版单位等.

10. 附录

附录是正文的补充,与正文有关而又不便于编入正文的内容都收集在这里. 包括:计算机程序、比较重要但数据量较大的中间结果等. 为便于阅读,应在源程序中加入足够的注释和说明语句.

1.4 习 题

1. 1650年世界人口为5亿,当时的年增长率为0.3%,用指数增长模型计算什么时候世界人口达到10亿(实际上1850年前已超过10亿). 1970年世界人口为36亿,年增长率为2.1%,用指数增长模型预测什么时候世界人口会翻一番(这个结果可信吗). 你对同样的模型得出的两个结果有何看法?

2. 利用1.1节表1-1给出的美国1790—1990年人口资料建立一个分段的指数增长模型. 比如把时间分为3段,分别确定增长率,并进行检验.

3. 假定人口的增长服从这样的规律:时刻t的人口为$x(t)$,t到$t+\Delta t$时间段内人口的增长量与$x_m - x(t)$成正比(其中x_m为最大人口容量). 试建立模型并求解. 作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

第 2 章　MATLAB 入门

2.1　MATLAB 的进入与运行方式

MATLAB 是 MathWorks 公司于 1984 年推出的一套数值计算软件，分为总包和若干个工具箱，可以实现数值分析、优化、统计、微分方程数值解、信号处理、图像处理等若干领域的计算和图形显示功能. 它将不同数学分支的算法以函数的形式分类成库，使用时直接调用这些函数并赋予实际参数就可以解决问题，快速而且准确.

MATLAB 建立在向量、数组和矩阵的基础上，使用方便，人机界面直观，输出结果可视化，深受用户欢迎，应用范围十分广泛.

本书采用 MATLAB 6.3 版.

2.1.1　MATLAB 的进入与界面

当你在计算机中成功地安装了 MATLAB 6.3 版后，在 Windows 桌面上就会出现 MATLAB 6.3 图标. 双击此图标，就进入 MATLAB 的界面.

MATLAB 的界面上共有五个窗口，它们是：

1. 命令窗口(Command Window)

在命令窗口中可以直接输入命令行，以实现计算或绘图功能.

2. 起始面板(Launch Pad)

该窗口中显示 MATLAB 总包和已安装的工具箱的帮助、演示、GUI 工具和产品主页 4 个方面的内容. 若要查看相关内容，只需双击对应目录即可.

3. 工作空间(Workspace)

该窗口中显示当前 MATLAB 的内存中使用变量的信息，包括变量名、变量数组大小、变量字节大小和变量类型.

在工作空间窗口中选定某个变量后，双击变量名，将打开数组编辑器窗口(Array Editor)，显示该变量具体内容，该显示主要用于数值型变量. 也可以在数组编辑器修改该数据.

4. 命令历史(Command History)

该窗口显示所有执行过的命令. 利用该窗口，一方面可以查看曾经执行过的命令；另一方面，可以重复利用原来输入的命令行，这只需在命令历史窗口中直接双击某个命令，就可执行该命令行.

5. 当前目录(Current Directory)

该窗口显示当前工作目录下所有文件的文件名、文件类型和最后修改时间. 可以在该窗口上方的小窗口中修改工作目录.

2.1.2　MATLAB 的运行方式

MATLAB 提供了两种运行方式:命令行方式和 M 文件方式.

命令行运行方式通过直接在命令窗口中输入命令行来实现计算或作图功能,但这种方式在处理比较复杂的问题和大量数据时相当困难.

而 M 文件运行方式则是先在一个以 m 为扩展名的 M 文件中输入一系列数据和命令,然后让 MATLAB 执行这些命令. MATLAB 的 M 文件有两种类型:脚本 M 文件和函数 M 文件. 现在先介绍脚本 M 文件,函数 M 文件将在下一节中介绍.

一个比较复杂的程序常常要作反复的调试,这时可以建立一个脚本 M 文件并将其储存起来,以便随时调用计算. 脚本 M 文件就是命令的简单叠加. 建立 M 文件的方法是:在 MATLAB 窗口中单击 File 菜单,然后依次选择 New → M-File,打开 M 文件编辑窗口,在该窗口中输入程序文件,再以 m 为扩展名存储. 要运行该 M 文件,只需在 M 文件编辑窗口的 Debug 菜单中选择 Run 即可.

2.2　变量与函数

2.2.1　变量

MATLAB 中变量的命名规则是:

(1) 变量名必须是不含空格的单个词;

(2) 变量名区分大小写;

(3) 变量名最多不超过 19 个字符;

(4) 变量名必须以字母打头,之后可以是任意字母、数字或下划线,变量名中不允许使用标点符号.

除了上述命名规则,MATLAB 还有几个特殊变量,见表 2 - 1.

表 2 - 1　特殊变量表

特殊变量	取　　值
ans	用于结果的缺省变量名
pi	圆周率
eps	计算机的最小数,当和 1 相加就产生一个比 1 大的数
flops	浮点运算数
inf	无穷大,如 1/0
NaN	不定量,如 0/0
i,j	$i = j = \sqrt{-1}$
realmin	最小可用正实数
realmax	最大可用正实数

2.2.2　数学运算符号及标点符号

MATLAB 中常用的数学运算符号见表 2 – 2.

表 2 – 2　数学运算符号表

+	加法运算,适用于两个数或两个同阶矩阵相加
–	减法运算
*	乘法运算
.*	点乘运算
./	点除运算
^	乘幂运算
\	反斜线表示左除

MATLAB 中标点符号的含义是:

(1) MATLAB 的每条命令后,若为逗号或无标点符号,则显示命令的结果;若命令后为分号,则禁止显示结果.

(2) “%” 后面所有文字为注释.

(3) “…” 表示续行.

2.2.3　数学函数

MATLAB 所支持的部分常用函数见表 2 – 3.

表 2 – 3　常用基本函数

函　数	名　称	函　数	名　称
sin x	正弦函数	asin x	反正弦函数
cos x	余弦函数	acos x	反余弦函数
tan x	正切函数	atan x	反正切函数
abs x	绝对值	max x	最大值
min x	最小值	sum x	元素的总和
sqrt x	开平方	exp x	以 e 为底的指数
log x	自然对数	$\log_{10} x$	以 10 为底的对数
sign x	符号函数	fix x	取整

例 1　求 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{5}$ 时的值.

```
>>  y = sin(pi/5)
    y = 0.5875
```

2.2.4　函数 M 文件

MATLAB 的内部函数是有限的,有时为了研究某一个函数的各种性态,需要为 MATLAB 定

义新函数,为此必须编写函数 M 文件. 函数 M 文件是文件名后缀为 m 的文件,这类文件的第一行必须是以一特殊字符 function 开始,格式为:

```
function  因变量名 = 函数名(自变量名)
```

下面各行为从自变量计算因变量的语句,并最终将结果赋给因变量. 函数 M 文件的文件名必须与函数名完全一致.

函数 M 文件与前面介绍的脚本 M 文件主要有以下差异:

(1) 函数 M 文件的文件名必须与函数名相同.

(2) 脚本 M 文件没有输入参数与输出参数,而函数 M 文件有输入与输出参数. 对函数进行调用时,可以按少于函数 M 文件规定的输入与输出变量个数,但不能多于函数 M 文件规定的输入与输出变量个数.

(3) 脚本 M 文件运行产生的所有变量都是全局变量,而函数 M 文件的所有变量除特别声明外,都是局部变量.

例 2 画出函数 $f(x) = \sqrt{(x-20)^2 + 100^2} + \sqrt{(x-120)^2 + 120^2}$ 的图形.

在 M 文件编辑窗口录入下列两行:

```
function  yy = f2(x)
yy = sqrt((x - 20).^2 + 100^2) + sqrt((x - 120).^2 + 120^2);
```

以 f2.m 将文件存盘并退出编辑状态,然后重新回到 MATLAB 命令窗口. 这时可用指令

```
x = 20:120;y = f2(x);
plot(x,y)
```

确定自变量值并计算对应的函数值数据,最后再绘出函数的图形,见图 2 - 1.

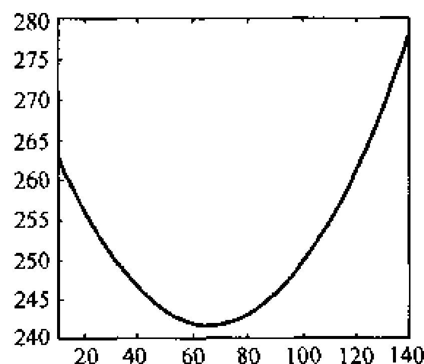


图 2 - 1

例 3 计算函数 $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ 在 (1,2) 处的函数值.

1. 建立 M 文件:fun.m

```
function  f = fun(x)
f = 100 * (x(2) - x(1)^2)^2 + (1 - x(1))^2
```

2. 在 MATLAB 命令窗口键入命令:

```
x = [1 2]
fun(x)
```

2.3 数组与矩阵

2.3.1 数组

1. 数组的建立

简单数组的输入方法见表 2 - 4.

表 2-4 简单数组的建立

x - [a b c d e f]	创建包含指定元素的行向量
x = first : last	创建从 first 开始,加 1 计数,到 last 结束的行向量
x = first : increment : last	创建从 first 开始,加 increment 计数,到 last 结束的行向量
linspace(first,last,n)	创建从 first 开始,到 last 结束,有 n 个元素的行向量

下面举例说明.

例 1
```
>>   x = [1 2 3 4 5 8 7 18]
     y = 1 :7
     z = 3 :2 :9
     v = [y z]
     u = linspace(2,9,11)
x =     1     2     3     4     5     8     7     18
y =     1     2     3     4     5     6     7
z =     3     5     7     9
v =
  Columns 1 through 10
    1    2    .3    4    5    6    7    3    5    7
  Column 11
    9
u =
  Columns 1 through 6
    2.0000    2.7000    3.4000    4.1000    4.8000    5.5000
  Columns 7 through 11
    6.2000    6.9000    7.6000    8.3000    9.0000
```

2. 数组元素的访问

为了访问数组元素(分量),可对数组元素进行编址:

(1) 访问一个元素:数组元素可以用下标访问,如 x(i) 表示数组 x 的第 i 个元素.

例 2
```
>>   x(4)
ans = 4
```

(2) 访问一块元素:访问矩阵的某些元素或子块.

x(a :b :c) 表示访问数组 x 的从第 a 个元素开始,以步长为 b 到第 c 个元素(但不超过 c),b 可以为负数,b 缺省时为 1.

例 3
```
>>   x = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
     y = x(2 :2 :11),z = x(10 :-3 :1)
     y = 2    4    6    8    10
     z - 10   7    4    1
```

(3) 直接使用元素编址序号. x([a b c d]) 表示提取数组 x 的第 a、b、c、d 个元素构成一

个新的数组[x(a) x(b) x(c) x(d)].

例 4 >> m = x([8 2 9 1])

m = 8 2 9 1

3. 数组的方向

前面例子中的数组都是一行数列,是行方向分布的,称之为行向量.数组也可以是列向量,它的数组操作和运算与行向量是一样的,唯一的区别是结果以列形式显示.

产生列向量有两种方法:直接产生和转置产生.

例 5 >> c = [1;2;3;4],b = c'

```
c =      1
         2
         3
         4
b = 1    2    3    4
```

说明:以空格或逗号分隔的元素指定的是不同列的元素,而以分号分隔的元素指定了不同行的元素.当数组 b 是复数时,转置(b')产生的是复数共轭转置,而点-转置(b.')产生的只对数组转置,不进行共轭.对于实数来说,b'和 b.'是等效的.

4. 数组的运算

(1) 标量-数组运算

数组对标量的加、减、乘、除、乘方是数组的每个元素对该标量施加相应的加、减、乘、除、乘方运算.

设:a = [a1,a2,…,an], c 是标量,则

a + c = [a1 + c,a2 + c,…,an + c]

a * c = [a1 * c,a2 * c,…,an * c]

a./c = [a1/c,a2/c,…,an/c] (右除)

a.\c = [c/a1,c/a2,…,c/an] (左除)

a.^c = [a1^c,a2^c,…,an^c]

c.^a = [c^a1,c^a2,…,c^an]

例 6 编写 M 文件 shuzu3.m 如下:

```
a = [1 2 3 4];
c = 2;
a1 = a + c
a2 = a * c
a3 = a./c
a4 = a.\c
a5 = a.^c
a6 = c.^a
```

运行得以下结果:

```
a1 = 3    4    5    6
```

```
a2 = 2      4      6      8
a3 = 0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
a4 = 2.0000    1.0000    0.6667    0.5000
a5 = 1      4      9      16
a6 = 2      4      8      16
```

(2) 数组 - 数组运算

当两个数组有相同维数时,加、减、乘、除、幂运算可按元素对元素方式进行,不同大小或维数的数组是不能进行运算的.

设:a = [a1,a2,…,an], b = [b1,b2,…,bn],则

```
a + b = [a1 + b1,a2 + b2,…,an + bn]
a.* b = [a1 * b1,a2 * b2,…,an * bn]
a./b = [a1/b1,a2/b2,…,an/bn]
a.\b = [b1/a1,b2/a2,…,bn/an]
a.^b = [a1^b1,a2^b2,…,an^bn]
```

例 7 编写 M 文件 shuzu4.m 如下:

```
a = [2 2 2];
b = [3 3 3];
c1 = a + b
c2 = a.*b
c3 = a./b
c4 = a.\b
c5 = a.^b
```

运行得以下结果:

```
c1 = 5     5     5
c2 = 6     6     6
c3 = 0.6667    0.6667    0.6667
c4 = 1.5000    1.5000    1.5000
c5 = 8     8     8
```

2.3.2 矩阵

1. 矩阵的建立

数组可以是一个行向量或列向量,也可以是具有几个行或列的矩阵形式. 矩阵的创建遵循创建行向量和列向量所用的方式. 逗号或空格用于分隔某一行的元素,分号用于区分不同的行. 除了分号,在输入矩阵时,按 Return 或 Enter 键也表示开始一新行. 输入矩阵时,严格要求所有行有相同的列.

例 1
```
>>  a = [1 2 3 4 ;5 6 7 8;9 10 11 12]
    a = 1     2     3     4
        5     6     7     8
```

```
        9     10     11     12
```

MATLAB 提供了几个建立特殊矩阵的命令如下：

```
a = []             产生一个空矩阵，当对一项操作无结果时，返回空矩阵，空矩阵的大小为零
b = zeros(m,n)     产生一个 m 行 n 列的零矩阵
c = ones(m,n)      产生一个 m 行 n 列的元素全为 1 的矩阵
d = eye(m,n)       产生一个 m 行 n 列的单位矩阵
```

例 2 编写 M 文件 matrix1.m 如下：

```
a = [ ]
b = zeros(2,3)
c = ones(2,3)
d = eye(2,3)
e = eye(3,3)
```

运行得以下结果：

```
a = []
b =
     0     0     0
     0     0     0
c =
     1     1     1
     1     1     1
d =
     1     0     0
     0     1     0
e =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

2. 矩阵中元素的操作

(1) 矩阵 A 的第 r 行：A(r,:)

(2) 矩阵 A 的第 r 列：A(:,r)

(3) 依次提取矩阵 A 的每一列，将 A 拉伸为一个列向量：A(:)

(4) 取矩阵 A 的第 $i_1 \sim i_2$ 行、第 $j_1 \sim j_2$ 列构成新矩阵：A(i1:i2, j1:j2)

(5) 以逆序提取矩阵 A 的第 $i_1 \sim i_2$ 行，构成新矩阵：A(i2:-1:i1,:)

(6) 以逆序提取矩阵 A 的第 $j_1 \sim j_2$ 列，构成新矩阵：A(:,j2:-1:j1)

(7) 删除 A 的第 $i_1 \sim i_2$ 行，构成新矩阵：A(i1:i2,:) = [ ]

(8) 删除 A 的第 $j_1 \sim j_2$ 列，构成新矩阵：A(:,j1:j2) = [ ]

(9) 将矩阵 A 和 B 拼接成新矩阵：[A B];[A;B]

例 3 编写 M 文件 matrix2.m 如下：

```
a = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
a1 = a(2, :)
a2 = a(:,2)
a3 = a(:)
a4 = a(1:2,2:3)
a5 = a(2:-1:1, :)
a6 = a(:,3:-1:2)
a7 = a;a7(1:2, :) = [ ]
a8 = a;a8(:,1) = [ ]
a9 = [a a2]
a10 = [a;a1]
```

运行得以下结果：

```
a =
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9
a1 = 4    5    6
a2 =
     2
     5
     8
a3 =
     1
     4
     7
     2
     5
     8
     3
     6
     9
a4 =
     2    3
     5    6
a5 =
     4    5    6
     1    2    3
a6 =
```

```
         3     2
         6     5
         9     8
   a7  = 7     8     9
   a8  =
         2     3
         5     6
         8     9
   a9  =
         1     2     3     2
         4     5     6     5
         7     8     9     8
   a10  =
          1     2     3
          4     5     6
          7     8     9
          4     5     6
```

3. 矩阵的运算

(1) 标量 - 矩阵运算：与标量 - 数组运算类似.

(2) 矩阵 - 矩阵运算：矩阵的元素对元素的运算，与数组的数组 - 数组运算类似.

而线性代数中所定义矩阵运算的命令如下：

矩阵加法：A + B

矩阵乘法：A * B

方阵的行列式：det(A)

方阵的逆：inv(A)

方阵的特征值与特征向量：[V,D] = eig(A)

例 4 编写 M 文件 matrix3.m 如下：

```
a = [1 2 3; 4 5 6]
b = [1 2; 1 2; 1 2]
c1 = a + a
c2 = a * b
c = [2 7 3;3 9 4;1 5 3]
c3 = det(c)
c4 = inv(c)
[v,d] = eig(c)
```

运行得以下结果：

```
a =
     1     2     3
```

```
    4     5     6
b =
    1     2
    1     2
    1     2
c1 =
     2     4     6
     8    10    12
c2 =
     6    12
    15    30
c =
    2     7     3
    3     9     4
    1     5     3
c3 = -3
c4 =
    -2.3333    2.0000    -0.3333
     1.6667   -1.0000    -0.3333
    -2.0000    1.0000     1.0000
v =
   -0.5515   -0.7857   -0.2743
   -0.7309    0.4412   -0.3391
   -0.4020   -0.4337    0.8999
d =
   13.4635        0          0
        0    -0.2747         0
        0         0     0.8112
```

2.4 MATLAB 程序设计

MATLAB 可以像 C、FORTRAN 等计算机高级语言一样，进行程序设计，编写 M 文件. 本节简单介绍 MATLAB 中关系、逻辑运算和条件、循环语句等重要的编程手段.

2.4.1 关系和逻辑运算

除了传统的数学运算，MATLAB 支持关系和逻辑运算. 一个重要的应用是控制基于真/假命题的一系列 MATLAB 命令(通常在 M 文件中)的流程，或执行程序. 作为所有关系和逻辑表达式的输入，MATLAB 把任何非零数值当作真，把零当作假. 所有关系和逻辑表达式的输出，对于真，

输出为 1;对于假,输出为 0.

1. 关系操作符

MATLAB 关系操作符见表 2 - 5,其包括所有常用的比较.能用来比较两个同样大小的矩阵,或用来比较一个矩阵和一个标量.后一种情况是,标量和矩阵中的每一个元素相比较,结果与矩阵大小一样.

表 2 - 5

关系操作符	说明
<	小于
< =	小于或等于
>	大于
> =	大于或等于
= =	等于
~ =	不等于

2. 逻辑操作符

逻辑操作符提供了一种组合或否定关系表达式,MATLAB 逻辑操作符见表 2 - 6。

表 2 - 6

逻辑操作符	说明
&	与
|	或
~	非

2.4.2　控制流

MATLAB 提供三种决策或控制流结构:for 循环,while 循环和 if - else - end 结构.这些结构经常包含大量的 MATLAB 命令,故经常出现在 MATLAB 的 M 文件中.

1. for 循环

允许一组命令以固定的和预定的次数重复,for 循环的一般形式为:

```
for  x = array
    {commands}
end
```

在 for 和 end 语句之间的命令串{commands}按数组(array)中的每一列执行一次.在每一次迭代中,x 被指定为数组的下一列,即在第 n 次循环中,x = array(:,n).

例 1　对 $n = 1,2,\cdots,10$,分别求 $x_n = \frac{n\pi}{10}$ 的值.

编写 M 文件 for1.m 如下:

```
for n = 1:10
  x(n) = sin(n*pi/10);
end
x
```

运行得以下结果:

```
x =
    Columns 1 through 7
    0.3090    0.5878    0.8090    0.9511    1.0000    0.9511    0.8090
    Columns 8 through 10
    0.5878    0.3090    0.0000
```

for 循环应注意:for 循环内不能对循环变量重新赋值;for 循环内接受任何有效 MATLAB 数组;for 循环可按需要嵌套;为提高运算速度,当能用其他方法解决时,尽量不用 for 循环,必须用 for 循环时应预先分配数组(预先分配内存).

2. While 循环

与 for 循环以固定次数求一组命令相反,while 循环以不定的次数求一组语句的值,While 循环的一般形式是:

```
while  (expression)
    {commands}
end
```

只要在表达式(expression) 里的所有元素为真,就执行 while 和 end 语句之间的命令串{commands}. 通常,表达式的求值给出一个标量值,对数组值同样有效,数组情况下,所得到数组的所有元素必须都为真.

例 2 设银行年利率为 11.25%,将 10 000 元钱存入银行,问多长时间会连本带利翻一番?

编写 M 文件 while1.m 如下:

```
money = 10000;
years = 0;
while money < 20000
  years = years + 1;
  money = money*(1 + 11.25/100);
end
years
money
```

运行得以下结果:

```
years = 7
money = 2.1091e + 004
```

3. if - else - end 结构

(1) 有一个选择的一般形式是:

```
if  (expression)
```

```
  {commands}
end
```

如果在表达式(expression)里的所有元素为真,就执行 if 和 end 语句之间的命令串{commands}.

例 3 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ 2x, & x \leqslant 1 \end{cases}$$

求 $f(2)$, $f(-1)$.

先建立以下 M 文件 fun1.m 定义函数 $f(x)$,再在 MATLAB 命令窗口输入 fun1(2), fun1(-1) 即可.

```
function f = fun1(x)
if x > 1
  f = x^2 + 1
end
if x < = 1
  f = 2 * x
end
```

(2) 有两个选择的一般形式是:

```
if (expression)
    {commands1}
else
    {commands2}
end
```

如果表达式(expression)为真,则执行第一组命令{commands1};表达式为假,则执行第二组命令{commands2}.

(3) 有三个或更多选择的一般形式是:

```
if (expression1)
      {commands1}
      else if (expression2)
      {commands2}
      else if (expression3)
      {commands3}
      else if ……
…………………………
      else
      {commands}
      end
      end
```

```
        end
    .....
  end
```

这种有三个以上选择的 if - else - end 形式,依次检查各表达式,只执行第一个表达式为真的命令串,接下来的表达式不检查,跳过其余的 if - else - end 结构,而且,最后的 else 命令可有可无.

例 4 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>1\\ 2x, & 0<x\leqslant 1\\ x^3, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求 $f(2)$,$f(0.5)$,$f(-1)$.

先建立以下 M 文件 fun2.m 定义函数 $f(x)$,再在 MATLAB 命令窗口输入 fun2(2),fun2(0.5),fun2(-1) 即可.

```
function f = fun2(x)
if x > 1
  f = x^2 + 1
else if x < = 0
    f = x^3
  else
    f = 2 * x
  end
end
```

2.5 MATLAB 作图

2.5.1 二维图形

二维图形即平面曲线,MATLAB 提供了画曲线的函数.

1. 曲线图

MATLAB 作图是通过描点、连线来实现的.故在画一个曲线图形之前,必须先取得该图形上的一系列的点的坐标(即横坐标和纵坐标),然后将该点集的坐标传给 MATLAB 函数画图.作二维图形和三维图形都是同样的道理.

```
plot(X,Y,S)
plot(X,Y)
plot(X,Y1,S1,X,Y2,S2,…,X,Yn,Sn)
```

X,Y 是向量,分别表示点集的横坐标和纵坐标,命令 plot(X,Y,S) 描绘该点集所表示的曲线,其线型由 S 确定如下:

y	黄色	.	点	-	连线
m	洋红	o	圈	:	短虚线
c	蓝绿色	x	x - 符号	-.	长短线
r	红色	+	加号	--	长虚线

命令 plot(X,Y) 画实线,其参数 X、Y 与 plot(X,Y,S) 中的相同.

命令 plot(X,Y1,S1,X,Y2,S2,…,X,Yn,Sn) 将多条线画在一起,参数同 plot(X,Y,S).

例 1 (1) 在区间[0,2π] 画 sin x;

(2) 在[0,2π] 用红线画 sin x,用绿圈画 cos x.

解 输入命令:

```
(1) x = linspace(0,2*pi,30);
    y = sin(x);
    plot(x,y)
(2) x = linspace(0,2*pi,30);
    y = sin(x);
    z = cos(x);
    plot(x,y,'r',x,z,'co')
```

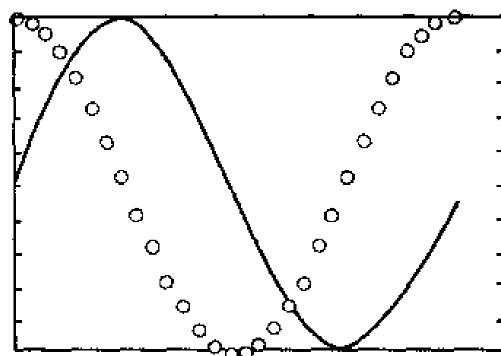


图 2 - 2

见图 2 - 2.

2. 符号函数(显函数、隐函数和参数方程)画图

符号函数画图可以通过函数"ezplot"或"fplot"来实现.其中,函数 ezplot 的调用格式如下:

ezplot(f)	表示在默认区间 $-2\pi < x < 2\pi$ 绘制 $f = f(x)$ 的函数图
ezplot(f,[a,b])	表示在 $a < x < b$ 绘制显函数 $f = f(x)$ 的函数图
ezplot(f,[xmin,xmax,ymin,ymax])	表示在区间 $x_{min} < x < x_{max}$ 和 $y_{min} < y < y_{max}$ 绘制隐函数 $f(x,y) = 0$ 的函数图
ezplot(x,y,[tmin,tmax])	表示在区间 $t_{min} < t < t_{max}$ 绘制参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 的函数图

fplot(fun,lims) 表示绘制字符串 fun 指定的函数在 lims = [xmin,xmax] 的图形. fun 必须是 M 文件的函数名或是独立变量为 x 的字符串,此字符串被送入函数 eval. 函数 fun(x) 必须对向量中的每个元素 x 返一行向量.

fplot 函数不能画参数方程和隐函数图形,但在一个图上可以画多个图形.

例 2 在[0,π] 上画 $y = \sin x$ 的图形.

解 输入命令:

```
>> ezplot('sin(x)',[0,pi])
```

见图 2 - 3.

例 3 在[0,π] 上画 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ 星形图形.

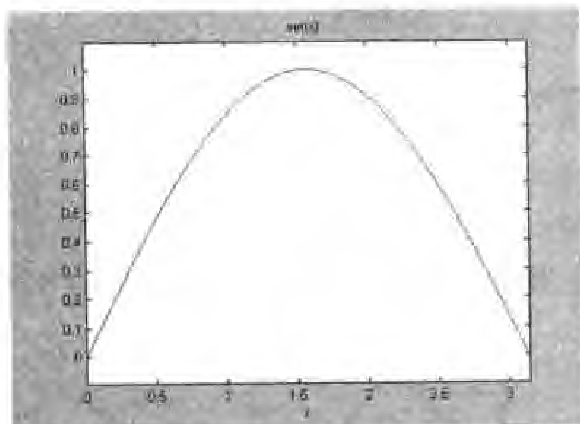


图 2 - 3

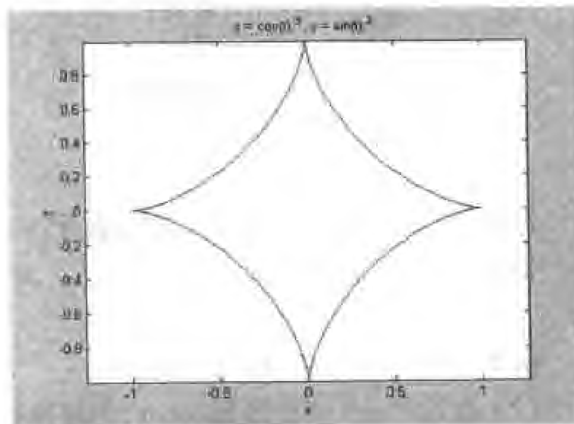


图 2 - 4

解　输入命令：

```
>> ezplot('cos(t).^3','sin(t).^3',[0,pi])
```

见图 2 - 4.

例 4　在[- 2,0.5],[0,2] 上画隐函数 $e^x + \sin(xy) = 0$ 的图形.

解　输入命令：

```
>> ezplot('exp(x) + sin(x*y)',[-2,0.5,0,2])
```

见图 2 - 5.

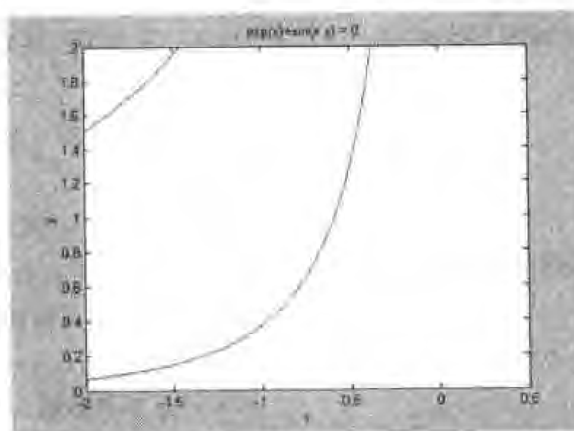


图 2 - 5

例 5　在[- 1,2] 上画 $y = e^{2x} + \sin(3x^2)$ 的图形.

解　先建 M 文件 myfun1.m：

```
function Y = myfun1(x)
Y = exp(2*x) + sin(3*x.^2)
```

再输入命令：

```
fplot('myfun1',[-1,2])
```

见图 2－6.

例 6 在[－2,2]范围内绘制函数 tanh 的图形.

解 `fplot('tanh',[-2,2])`

例 7 将 x、y 的取值范围都限制在[$-2\pi,2\pi$]，画函数 tanh x，sin x，cos x 的图形.

解 `fplot('[tanh(x),sin(x),cos(x)]',2*pi*[-1 1 -1 1])`

见图 2－7.

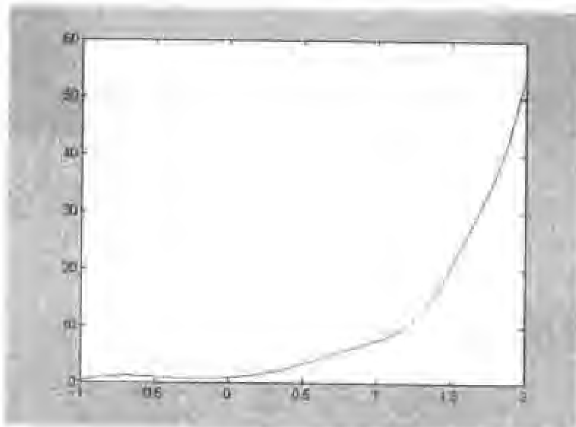


图 2－6

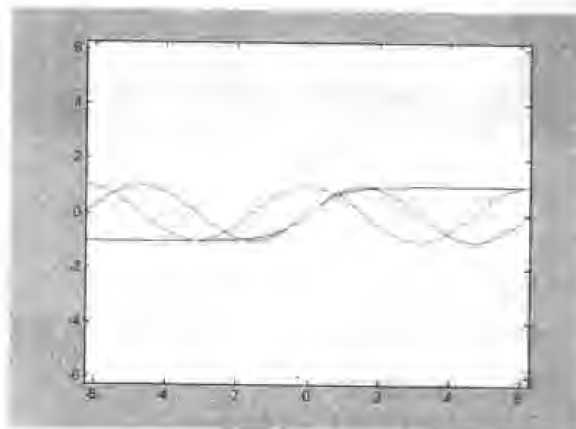


图 2－7

3. 对数坐标图

在很多工程问题中，通过对数据进行对数转换可以更清晰地看出数据的某些特征，在对数坐标系中描绘数据点的曲线，可以直接地表现对数转换．对数转换有双对数坐标转换和单轴对数坐标转换两种．用 loglog 函数可以实现双对数坐标转换，用 semilogx 和 semilogy 函数可以实现单轴对数坐标转换．

loglog(Y)	表示 x、y 坐标都是对数坐标系
semilogx(Y)	表示 x 坐标轴是对数坐标系
semilogy(…)	表示 y 坐标轴是对数坐标系
plotyy	表示有两个 y 坐标轴，一个在左边，一个在右边

例 8 用方形标记创建一个简单的 loglog 图．

解 输入命令：

```
x = logspace(-1,2);
loglog(x,exp(x),'-s')
grid on  % 标注格栅
```

见图 2－8．

例 9 创建一个简单的半对数坐标图．

解 输入命令：

```
x = 0:.1:10;
semilogy(x,10.^x)
```

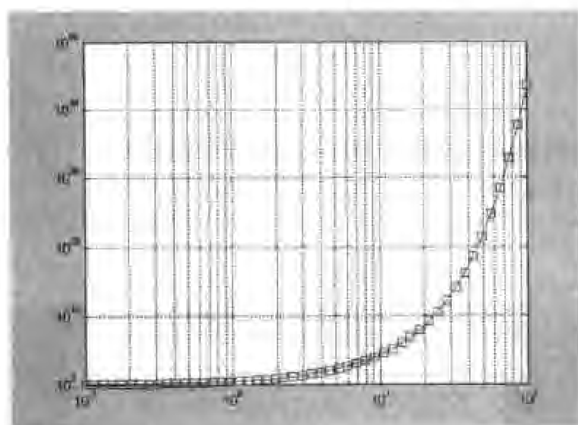


图 2 - 8

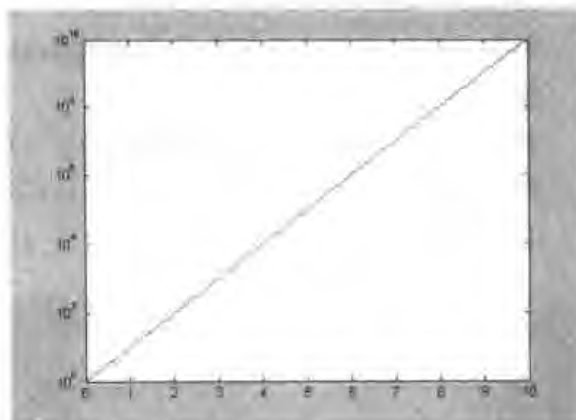


图 2 - 9

见图 2 - 9.

例 10　绘制 $y = x^3$ 的函数图、对数坐标图、半对数坐标图.

解　输入命令:

```
x = [1 :1 :100];
subplot(2,3,1);  % 子图
plot(x,x.^3);
grid on;  % 标准格栅
title'plot - y = x.^3 ';% 图头上标注
subplot(2,3,2);
loglog(x,x.^3);
grid on;
title'loglog - logy = 3logx';
subplot(2,3,3);
plotyy(x,x.^3,x,x);
grid on;
title'plotyy - y = x.^3,logy = 3logx';
subplot(2,3,4);
semilogx(x,x.^3);
grid on;
title'semilogx - y = 3logx';
subplot(2,3,5);
semilogy(x,x.^3);
grid on;
title'semilogy - logy = x.^3';
```

见图 2 – 10.

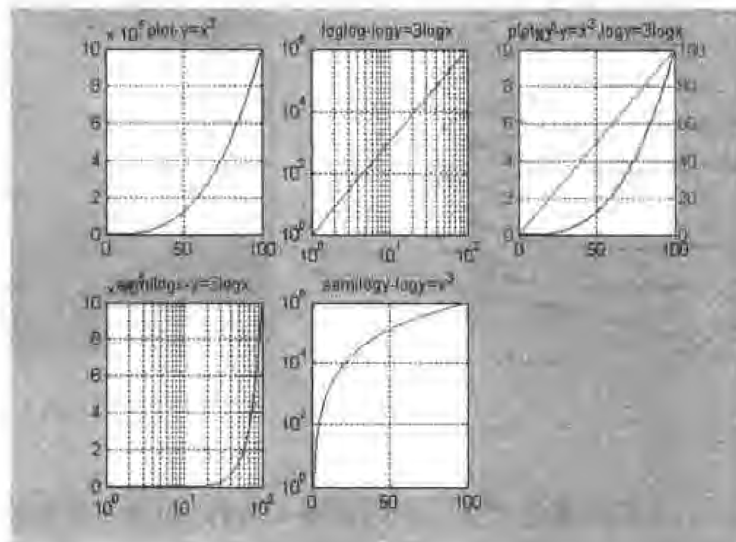


图 2 – 10

2.5.2 三维图形

三维图形包括空间曲线和曲面.

1. 三维曲线

(1) 一条曲线　plot3(x,y,z,S)

命令 plot3(x,y,z,S) 通过描点连线画出曲线，这里 x,y,z 是都是 n 维向量，分别表示该曲线上点集的横坐标、纵坐标、函数值，S 表示颜色、线形等.

例 1　在区间 $[0,10\pi]$ 画出参数曲线 $x = \sin t, y = \cos t, z = t$. 并分别标注.

解　输入命令：

```
t = 0 : pi/50 : 10 * pi;
plot3(sin(t),cos(t),t)
```

见图 2 – 11.

(2) 多条曲线　plot3(X,Y,Z)

命令 plot3(X,Y,Z) 通过描点连线画出多条曲线，这里 X, Y, Z 是都是 $m \times n$ 矩阵，其对应的每一列表示一条曲线.

例 2　画多条曲线，观察函数 $Z = (X + Y)^2$.

解　输入命令：

```
x = -3 : 0.1 : 3; y = 1 : 0.1 : 5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
  Z = (X + Y).^2;
  plot3(X,Y,Z)
```

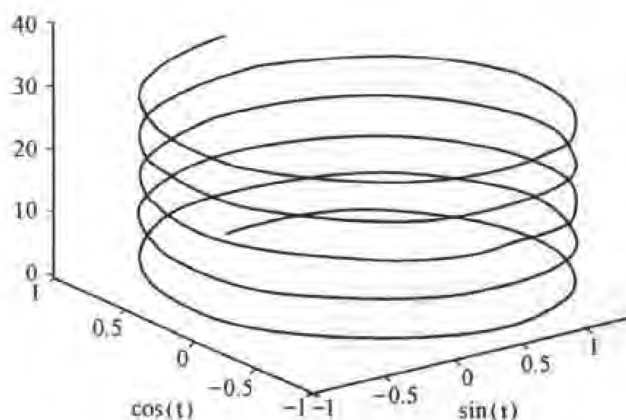


图 2 － 11

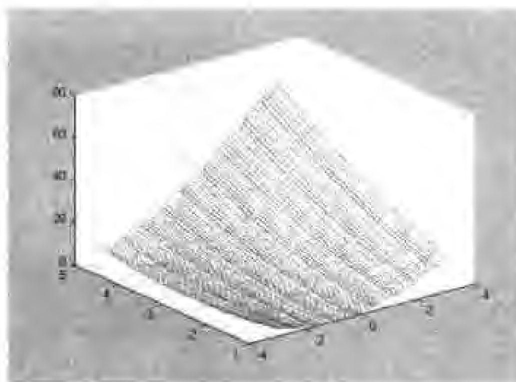


图 2 － 12

这里 meshgrid(x,y) 的作用是产生一个以向量 x 为行、向量 y 为列的矩阵，注意 x,y 的大小写．见图 2 － 12．

2. 空间曲面

(1) surf(X,Y,Z)

这里 X,Y,Z 是三个数据矩阵，分别表示数据点的横坐标、纵坐标、函数值，命令 surf(X,Y,Z) 将该数据点所表示的曲面画出．

例 3 画函数 $Z = (X + Y)^2$ 的图形．

解 输入命令：

```
x = -3 :0.1 :3;
y = 1 :0.1 :5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = (X + Y).^2;
surf(X,Y,Z)
```

见图 2 － 13．

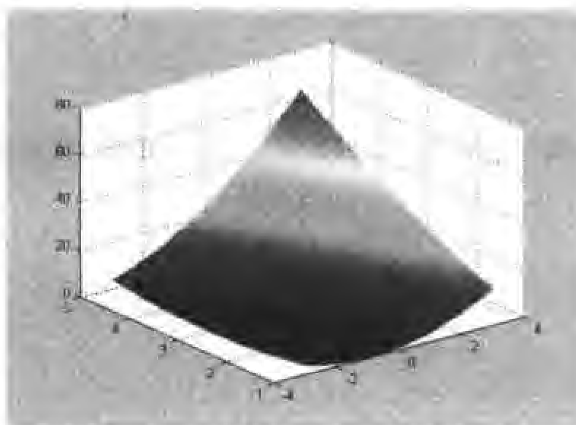


图 2 － 13

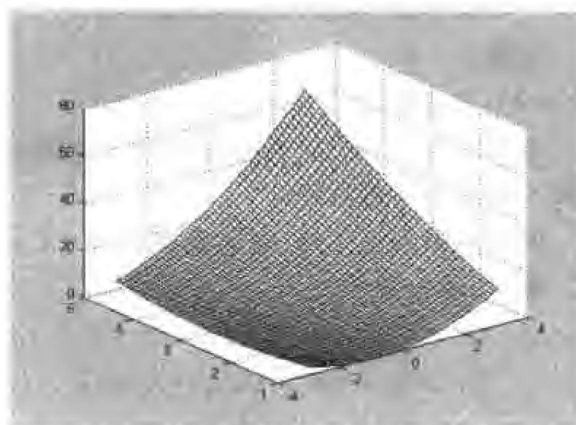


图 2 － 14

例 4 将曲面 peaks 平滑.

解 输入命令

```
[X,Y,Z] = peaks(30);
surf(X,Y,Z)
shading flat  % 图形变得平滑
```

(2) mesh(X,Y,Z)

命令 mesh(X,Y,Z) 画网格曲面.这里 X,Y,Z 是三个数据矩阵,分别表示数据点的横坐标、纵坐标、函数值,命令 mesh(X,Y,Z) 将该数据点在空间中描出,并连成网格.

例 5 画出曲面 $Z = (X + Y)^2$ 的网格图.

解 输入命令:

```
x = -3 :0.1 :3;
y = 1 :0.1 :5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = (X + Y).^2;
mesh(X,Y,Z)
```

见图 2 - 14.

(3) meshz(X,Y,Z) 在网格周围画一个 curtain 图(如,参考平面)

例 6 绘 peaks 的网格图

解 输入命令:

```
[X,Y] = meshgrid(-3 :.125 :3);
Z = praks(X,Y);
meshz(X,Y,Z)
```

见图 2 - 15.

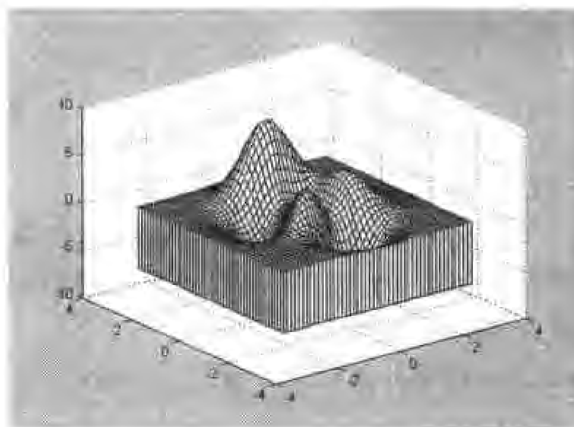


图 2 - 15

2.5.3 处理图形

1. 在图形上加格栅、图例和标注

(1) grid on, grid off

命令 grid on 在当前图上加格栅；命令 grid off 删除格栅.

(2) hh = xlabel('string')　　在当前图形的 x 轴上加图例 string

hh = ylabel('string')　　在当前图形的 y 轴上加图例 string

hh = zlabel('string')　　在当前图形的 z 轴上加图例 string

hh = title('string')　　在当前图形的顶端上加图例 string

例 1　在区间 $[0,2\pi]$ 画 $\sin x$ 的图形，加格栅，并加注图例"自变量 X"、"函数 Y"、"示意图".

解　输入命令：

```
x = linspace(0,2*pi,30);
y = sin(x);
plot(x,y)
grid on
xlabel('自变量 X');
ylabel('函数 Y');
title('示意图')
```

见图 2 – 16.

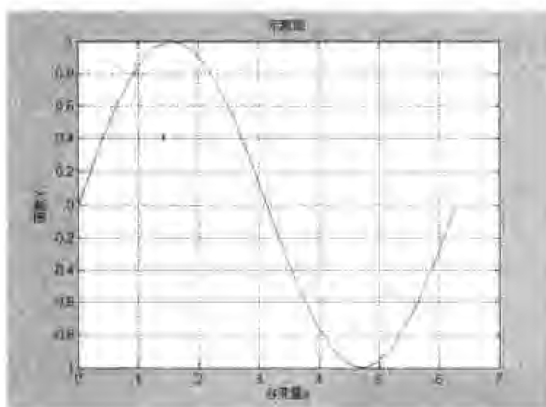


图 2 – 16

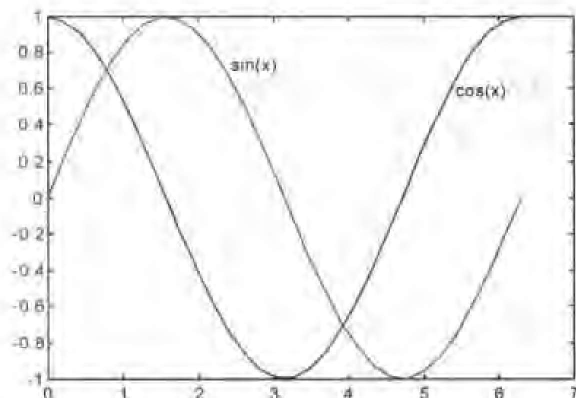


图 2 – 17

(3) hh = gtext('string')

命令 gtext('string') 用鼠标放置标注在现有的图上.运行命令 gtext('string') 时，屏幕上出现当前图形，并在图形上出现一个交叉的十字，该十字随鼠标的移动而移动，当按下鼠标左键时，该标注 string 放在当前十字交叉的位置.

例 2　在 $[0,2\pi]$ 画 $\sin x$, $\cos x$，并分别标注"$\sin x$"、"$\cos x$".

解　输入命令：

```
x = linspace(0,2*pi,30);
y = sin(x);
z = cos(x);
plot(x,z,x,y);gtext('sin(x)');gtext('cos(x)');
```

见图 2 – 17.

2. 定制坐标

```
axis([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN ZMAX])
axis auto
```

命令 axis([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN ZMAX])定制图形坐标,XMIN、XMAX、YMIN、YMAX、ZMIN、ZMAX 分别为 x、y、z 的最小、最大值.

命令 axis auto 将坐标轴返回到自动缺省值.

例 3 在区间[0.005,0.01]显示 $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$的图形.

解 输入命令:

```
x = linspace(0.0001,0.01,1000);
y = sin(1./x);
plot(x,y);
axis([0.005 0.01 -1 1])
```

见图 2-18.

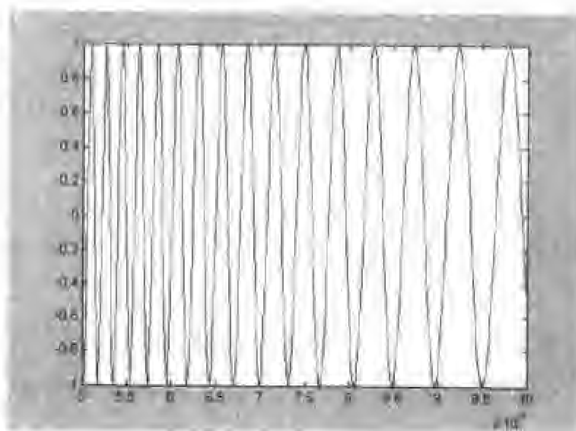


图 2-18

3. 图形保持

```
(1) hold on
    hold off
```

命令 hold on 保持当前图形,以便继续画图到当前的图上.命令 hold off 释放当前图形窗口.注意:"hold on"、"hold off"后不能跟分号";".若想将多条曲线画在一起,则可用"hold on".

例 4 将 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 分别用点和线画出在同一屏幕上.

解 输入命令:

```
x = linspace(0,2*pi,30);
y = sin(x);
z = cos(x);
plot(x,z,'ro:');
hold on
plot(x,y);
```

```
(2) H = figure
    figure(H)
```

命令 H = figure 创建图形并返回图形的句柄.

命令 figure(H) 新建 H 窗口,激活图形 H 使其可见,并把它置于其他图形之上.

若想在一个界面上画一个图形,并将多个图形一起画,而又不能相互影响,则可用 H = figure.

例 5 在区间$[0,2\pi]$分别画出 $y=\sin x$;$z=\cos x$ 的图形,保持并显示 $y=\sin x$ 的图形.

解 输入命令:

```
x = linspace(0,2*pi,100);
```

```
y = sin(x);z = cos(x);
plot(x,y);
title('sin(x)');
pause
figure(2);
plot(x,z);
title('cos(x)');
```

4. 图区控制(分割平面)

若打算在一个屏幕上画各自独立的多个图形,则需将屏幕分割为多块,并分别作图.

```
H = subplot(mrows, ncols, thisPlot)
subplot(mrows, ncols, thisPlot)
subplot(1, 1, 1)
```

命令 H = subplot(mrows, ncols, thisPlot) 划分整个作图区域为 mrows * ncols 块(逐行对块访问) 并激活第 thisPlot 块,其后的作图语句将图形画在该块上.

命令 subplot(mrows, ncols, thisPlot) 激活已划分为 mrows * ncols 块的屏幕中的第 thisPlot 块,其后的作图语句将图形画在该块上.

命令 subplot(1,1,1) 返回非分割状态.

例 6 将屏幕分割为四块,并分别画上 $y = \sin x$; $z = \cos x$; $a = \sin x\cos x$; $b = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

解 输入命令:

```
x = linspace(0,2 * pi,100);
y = sin(x);z = cos(x);a = sin(x).* cos(x);b = sin(x)./(cos(x) +
eps);
subplot(2,2,1);plot(x,y);title('sin(x)');
subplot(2,2,2);plot(x,z);title('cos(x)');
subplot(2,2,3);plot(x,a);title('sin(x)cos(x)');
subplot(2,2,4);plot(x,b);title('sin(x)/cos(x)');
```

见图 2 - 19.

5. 缩放图形

zoom on 为当前图形打开缩放模式.

单击鼠标左键,则在当前图形窗口中,以鼠标点中的点为中心的图形放大 2 倍;单击鼠标右键,则缩小 2 倍.

zoom off 关闭缩放模式.

例 7 缩放 $y = \sin x$ 的图形.

解 输入命令:

```
x = linspace(0,2 * pi,30);
    y = sin(x);
    plot(x,y)
```

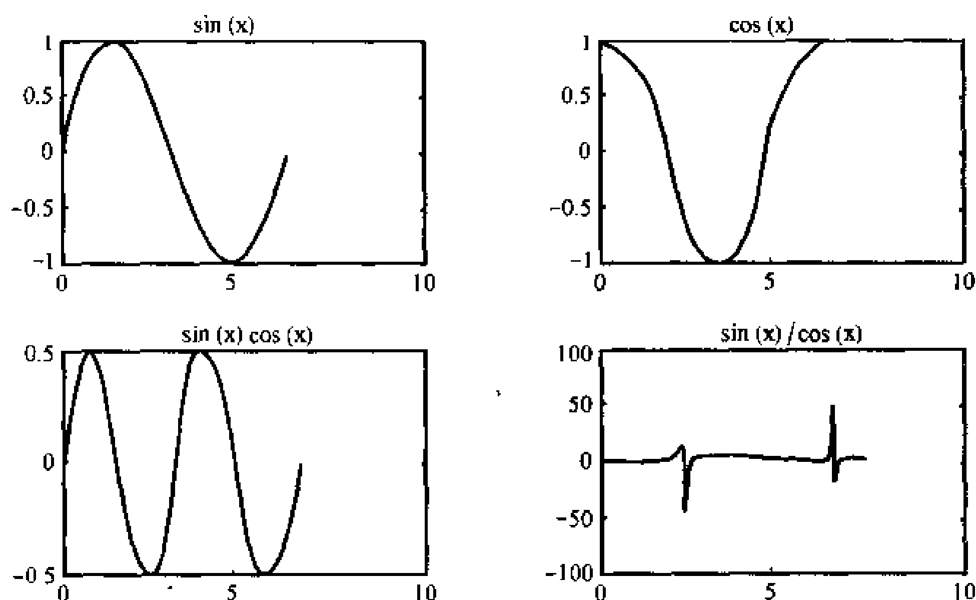


图 2 - 19

```
zoom on
```

2.5.4 特殊二、三维图形

1. 特殊二维图形

(1) 极坐标图:polar(theta,rho,s)

用角度 theta(弧度表示) 和极半径 rho 作极坐标图,用 s 指定线型.

例 1 画 $r = \sin 2\theta\cos 2\theta$ 的极坐标图形.

解 输入命令:

```
theta = linspace(0,2 * pi);
rho = sin(2 * theta) .* cos(2 * theta);
polar(theta,rho,'g');
title('Polar plot of sin(2 * theta) .* cos(2 * theta)');
```

见图 2 - 20.

(2) 散点图:scatter(X,Y,S,C)

scatter(X,Y,S,C) 在向量 *X* 和 *Y* 的指定位置显示彩色圈. *X* 和 *Y* 必须大小相同.

例 2 绘制 seamount 散点图.

解 输入命令:

```
load seamount
scatter(x,y,5,z)
```

见图 2 - 21.

(3) 平面等值线图:contour(x,y,z,n)

contour(x,y,z,n) 绘制 n 个等值线的二维等值线图.

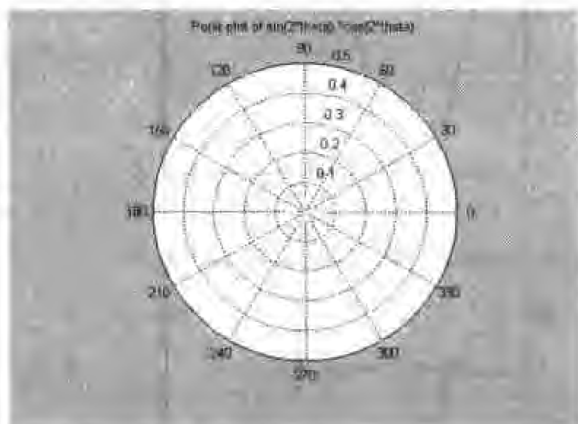


图 2 – 20

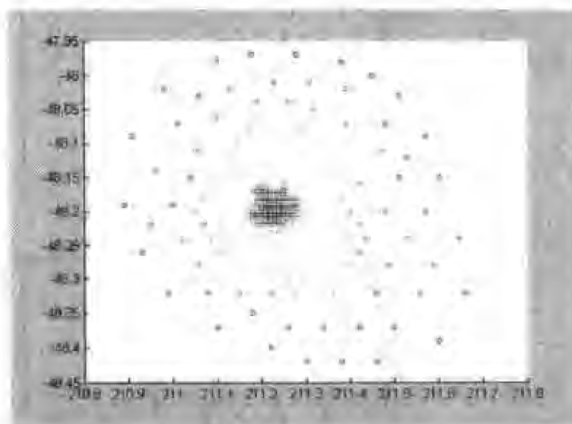


图 2 – 21

例 3 在范围 $-2 < x < 2$, $-2 < y < 3$ 内画 $z = xe^{-x^2-y^2}$ 的等值线图.

解 输入命令:

```
[X,Y] = meshgeid( - 2 :.2 : 2,
- 2 :.2 :3);
Z = X.* exp( - X.^2 - Y.^2);
[C,h] = contour(X,Y,Z);
clabel(C,h)
colormap cool
```

见图 2 – 22.

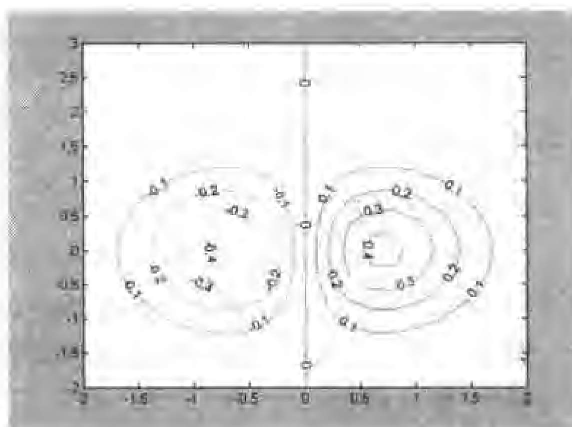


图 2 – 22

2. 特殊的三维图形函数

(1) 空间等值线图:contour3(x,y,z,n),其中 n 表示等值线数.

例 4 山峰的三维和二维等值线图.

解 输入命令:

```
[x,y,z] = peaks;
subplot(1,2,1)
contour3(x,y,z,16,'s')
grid, xlabel('x - axis'),ylabel('y - axis')
zlabel('z - axis')
title('contour3 of peaks');
subplot(1,2,2)
contour(x,y,z,16,'s')
grid, xlabel('x - axis'), ylabel('y - axis')
title('contour of peaks');
```

见图 2 - 23.

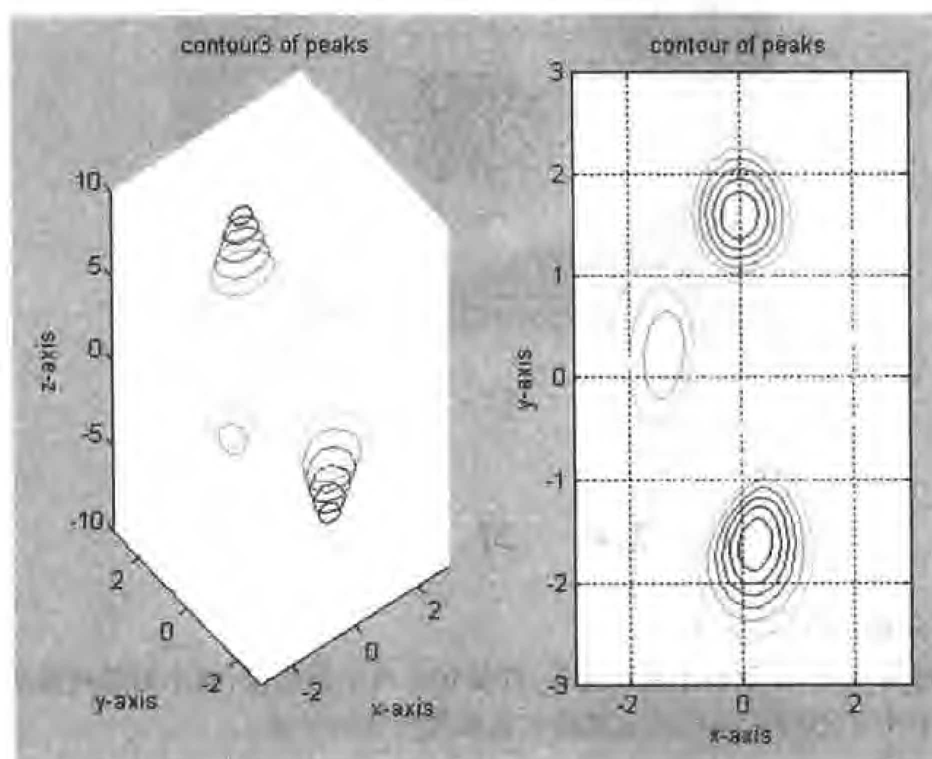


图 2 - 23

(2) 三维散点图　scatter3

scatter3(X,Y,Z,S,C) 在向量 ***X***,***Y*** 和 ***Z*** 指定的位置上显示彩色圆圈. 向量 ***X***,***Y*** 和 ***Z*** 的大小必须相同.

例 5　绘制三维散点图.

解　输入命令:

```
[x,y,z] = sphere(16);
X = [x(:)*.5 x(:)*.75 x(:)];
Y = [y(:)*.5 y(:)*.75 y(:)];
Z = [z(:)*.5 z(:)*.75 z(:)];
S = repmat([1 .75 .5]*10,prod(size(x)),1);
C = repmat([1 2 3],prod(size(x)),1);
scatter3(X(:),Y(:),Z(:),S(:),C(:),'filled'),view(-60,60)
```

见图 2 - 24.

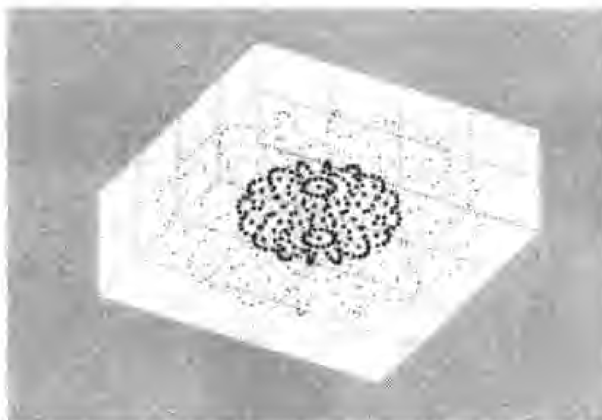


图 2 – 24

2.6　习　　题

1．对以下问题，编写 M 文件：

（1）用起泡法对 10 个数由小到大排序，即将相邻两个数比较，将小的调到前头．

（2）有一个 4 × 5 矩阵，编程求出其最大值及其所处的位置．

（3）编程求 $\sum_{n=1}^{20} n!$．

（4）一球从 100 m 高度自由下落，每次落地后反跳回原高度的一半，再落下．求它在第 10 次落地时，共经过多少米？第 10 次反弹有多高？

（5）有一函数 $f(x,y) = x^2 + \sin xy + 2y$，写一程序，输入自变量的值，输出函数值．

2．用 plot，fplot 绘制函数 $y = \cos(\tan(\pi x))$ 图形．

3．用 ezplot 绘制函数 $e^{xy} - \sin(x + y) = 0$ 在 $[-3,3]$ 上的图形．

4．用 ezplot 绘制摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$ 的图形．

5．用 surf，mesh 绘制曲面 $z = 2x^2 + y^2$．

6．用 polar 绘制阿基米德螺线 $r = a\theta$ 和三叶玫瑰线 $r = a\cos 3\theta$．

7．在同一平面的两个窗口中分别画出心形线和马鞍面．要求：

（1）在图形上加格栅、图例和标注；

（2）定制坐标；

（3）以不同的角度观察马鞍面．

第3章　线性规划

优化问题,一般是指用"最好"的方式,使用或分配有限的资源,即劳动力、原材料、机器、资金等,使得费用最小或者利润最大.

建立优化问题的数学模型,首先要确定问题的决策变量,用 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示,然后构造模型的目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和允许取值的范围 $\boldsymbol{x}\in\Omega$,Ω 称可行域,常用一组不等式(或等式)$g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$来界定,称为**约束条件**.一般地,这类模型可表述为如下形式:

$$\min_{\boldsymbol{x}} z=f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$$\text{s. t. } g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m) \tag{2}$$

由(1)、(2)组成的模型属于**约束优化**,若只有(1)式就是**无约束优化**.$f(\boldsymbol{x})$ 称为**目标函数**,$g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 称为**约束条件**.

在优化模型中,如果目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和约束条件中的 $g_i(\boldsymbol{x})$ 都是线性函数,则该模型称为**线性规划**.

3.1　线性规划模型

建立线性规划模型有三个基本步骤:

第一步,找出待定的未知变量(决策变量),并用代数符号表示它们.

第二步,找出问题中所有的限制或约束,写出未知变量的线性方程或线性不等式.

第三步,找到模型的目标或判据,写成决策变量的线性函数,以便求出其最大值或最小值.

例1　生产炊事用具需要两种资源——劳动力和原材料,某公司制定生产计划,生产三种不同产品,生产管理部门提供的数据如下:

	A	B	C
劳动力(小时/件)	7	3	6
原材料(千克/件)	4	4	5
利润(元/件)	4	2	3

每天供应原材料 200 kg,每天可供使用的劳动力为 150 h.建立线性规划模型,使总收益最大,并求各种产品的日产量.

解　第一步,确定决策变量.要求的未知变量是三个产品的日产量,用代数符号表示它们,即用 x_A,x_B,x_C 分别表示 A,B,C 三种产品的日产量.

第二步,确定约束条件.在这个问题中,约束条件可用劳动力和原材料来限制.

$$\text{原材料}:4x_A+4x_B+5x_C<200$$

$$\text{劳动力}:7x_A+3x_B+6x_C<150$$

第三步,确定目标函数.本问题的目标是使整个销售利润

$$Z=4x_A+2x_B+3x_C$$

最大. 根据以上三步可知,这个生产组合问题的线性规划为:

$$\max\ Z=4x_A+2x_B+3x_C$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_A+4x_B+5x_C<200\\7x_A+3x_B+6x_C<150\\x_A,x_B,x_C\geqslant 0\end{cases}$$

例 2 一家广告公司想在电视、广播上做广告,其目的是尽可能多地招徕顾客. 下面是市场调查结果:

	电视		无线电广播	杂志
	白天	最佳时间		
一次广告费用(千元)	40	75	30	15
受每次广告影响的顾客数(千人)	400	900	500	200
受每次广告影响的女顾客数(千人)	300	400	200	100

这家公司希望广告费用不超过 800(千元),还要求:(1) 至少要有二百万妇女收看广告;(2) 电视广告费用不超过 500(千元);(3) 电视广告白天至少播出 3 次,最佳时间至少播出 2 次;(4) 通过广播、杂志做的广告要重复 5 到 10 次.

解 令 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示白天电视、最佳时间电视、广播、杂志广告的次数. 于是广告经费的约束条件为:

$$40x_1+75x_2+30x_3+15x_4\leqslant 800$$

受广告影响的女顾客数的约束条件为:

$$300x_1+400x_2+200x_3+100x_4\geqslant 2\ 000$$

电视广告的约束条件为:

$$40x_1+75x_2\leqslant 500,\quad x_1\geqslant 3,x_2\geqslant 2$$

由于广播和杂志广告的次数都在 5 到 10 之间,于是

$$5\leqslant x_3\leqslant 10,5\leqslant x_4\leqslant 10$$

潜在的顾客数:$Z=400x_1+900x_2+500x_3+200x_4$. 故完整的线性规划如下:

$$\max\ Z=400x_1+900x_2+500x_3+200x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}40x_1+75x_2+30x_3+15x_4\leqslant 800\\300x_1+400x_2+200x_3+100x_4\geqslant 2\ 000\\40x_1+75x_2\leqslant 500\\x_1\geqslant 3\\x_2\geqslant 2\\x_3\geqslant 5\\x_3\leqslant 10\\x_4\geqslant 5\\x_4\leqslant 10\\x_i\geqslant 0,i=1,2,3,4\end{cases}$$

数学建模中线性规划模型的常用解法：线性规划问题的求解在理论上有单纯形法，在实际建模中常用以下解法：

1. 图解法；
2. LINGO 软件包；
3. Excel 中的规划求解；
4. MATLAB 软件包.

下面主要介绍线性规划模型的 MATLAB 软件包解法和 LINGO 软件包解法. 我们通过一些独立的例题来说明建立模型和模型求解的方法.

3.2 用 MATLAB 优化工具箱解线性规划

MATLAB 软件求解线性规划的命令如下：

1. `x = linprog(c,A,b)`

用于求解模型：

$$\min z = cX \qquad (1)$$
$$\text{s.t. } AX \leqslant b$$

2. `x = linprog(c,A,b,Aeq,beq)`

用于求解模型：

$$\min z = cX \qquad (2)$$
$$\text{s.t. } \begin{cases} AX \leqslant b \\ Aeq \cdot X = beq \end{cases}$$

若没有不等式约束：$AX \leqslant b$，则令 `A = [ ],b = [ ]`.

3. `x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)`

用于求解模型：

$$\min z = cX \qquad (3)$$
$$\text{s.t. } \begin{cases} AX \leqslant b \\ Aeq \cdot X = beq \\ \text{vlb} \leqslant X \leqslant \text{vub} \end{cases}$$

若没有等式约束：$Aeq \cdot X = beq$，则令 `Aeq = [ ],beq = [ ]`.

4. `x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub,X0)`

也用于求解模型(3)，其中 X_0 表示初始点.

5. `[x,fval] = linprog(...)`

返回最优解 x 及 x 处的目标函数值 fval.

注. linprog 对应着 MATLAB 5.3 中的 lp. lp 目前在 6.3 版中仍能使用，但在以后的新版本中将废除.

例 1 任务分配问题：某车间有甲、乙两台机床，可用于加工三种工件. 假定这两台车床的可用台时数分别为 800 和 900，三种工件的数量分别为 400、600 和 500，且已知用三种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如下表. 问怎样分配车床的加工任务，才能既满足

加工工件的要求，又使加工费用最低？

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件1	工件2	工件3	工件1	工件2	工件3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	800
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	900

解 设在甲车床上加工工件1、2、3的数量分别为 x_1、x_2、x_3，在乙车床上加工工件1、2、3的数量分别为 x_4、x_5、x_6. 可建立以下线性规划模型：

$$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \leqslant 800 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \leqslant 900 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

改写为

$$\min z = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 10 & 11 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \begin{bmatrix} 0.4 & 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.2 & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 800 \\ 900 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$$

编写 M 文件 xxgh3.m 如下：

```
f =[13 9 10 11 12 8];
A =[0.4 1.1 1 0 0 0
    0 0 0 0.5 1.2 1.3];
b =[800;900];
Aeq =[1 0 0 1 0 0
      0 1 0 0 1 0
      0 0 1 0 0 1];
beq =[400 600 500];
vlb =zeros(6,1);
vub =[];
[x,fval] =linprog(f,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

结果：

```
x =
     0.0000
   600.0000
     0.0000
   400.0000
     0.0000
   500.0000
fval =
   1.3800e+004
```

即在甲机床上加工 600 个工件 2，在乙机床上加工 400 个工件 1、500 个工件 3，可在满足条件的情况下使总加工费最小，为 13 800.

例 2 某厂每日 8 小时的产量不低于 1 800 件. 为了进行质量控制，计划聘请两种不同水平的检验员. 且每种检验员的日产量不高于 1 800 件. 一级检验员的标准为：速度 25 件/小时，正确率 98%，计时工资 4 元/小时；二级检验员的标准为：速度 15 件/小时，正确率 95%，计时工资 3 元/小时. 检验员每错检一次，工厂要损失 2 元. 为使总检验费用最省，该工厂应聘一级、二级检验员各几名？

解 设需要一级和二级检验员的人数分别为 x_1、x_2，则应付检验员的工资为

$$8\times4\times x_1+8\times3\times x_2=32x_1+24x_2$$

因检验员错检而造成的损失为

$$(8\times25\times2\%\times x_1+8\times15\times5\%\times x_2)\times2=8x_1+12x_2$$

故目标函数为

$$\min z=(32x_1+24x_2)+(8x_1+12x_2)=40x_1+36x_2$$

约束条件为

$$\begin{cases} 8\times 25\times x_1+8\times 15\times x_2\geq 1\ 800 \\ 8\times 25\times x_1\leq 1\ 800 \\ 8\times 15\times x_2\leq 1\ 800 \\ x_i\geq 0, i=1,2 \end{cases}$$

即得线性规划模型

$$\min\ z=40x_1+36x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 5x_1+3x_2\geq 45 \\ x_1\leq 9 \\ x_2\leq 15 \\ x_i\geq 0, i=1,2 \end{cases}$$

改写为：

$$\min\ z=(40\quad 36)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} (-5\quad -3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\leq(-45) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \end{cases}$$

编写 M 文件 xxgh4.m 如下：

```
c=[40;36];
A=[ 5  3];
b=[-45];
Aeq=[];
beq=[];
vlb=zeros(2,1);
vub=[9;15];
% 然后调用 linprog 函数
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

结果为：

```
x =
    9.0000
    0.0000
fval =360
```

即只需聘用 9 个一级检验员.

注：本问题应还有一个约束条件：x_1、x_2 取整数. 故它是一个整数线性规划问题（见第 **4** 章）. 这里把它当成一个线性规划来解，求得其最优解刚好是整数：$x_1=9, x_2=0$，故它就是该整数规划的最优解. 若用线性规划解法求得的最优解不是整数，将其取整后不一定是相应整数规划的最优

解,这样的整数规划应用 LINGO 求解.

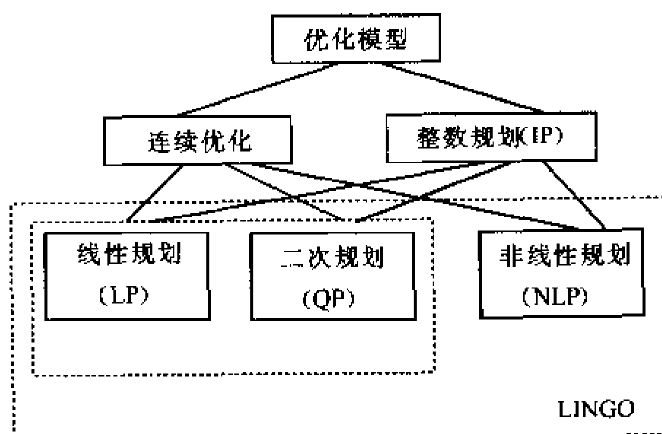
3.3 用 LINGO 解线性规划

LINGO 是一个利用线性规划和非线性规划来简洁地阐述、解决和分析复杂问题的简便工具.其特点是程序执行速度很快,易于输入、修改、求解和分析一个数学规划问题,因此 LINGO 在教育、科研和工业界得到了广泛应用.教学版和发行版的主要区别在于对优化问题的规模(变量和约束的个数)有不同的限制.LINGO 软件包有多种版本,但其软件内核和使用方法类似.详细情况可上网访问 LINGO 软件网站:www.lindo.com.

LINGO 是用来求解线性和非线性优化问题的简易工具.LINGO 内置了一种建立最优化模型的语言,可以简便地表达大规模问题,利用 LINGO 高效的求解器可快速求解并分析结果.

3.3.1 软件简介

LINGO 软件能求解的优化模型



使用 LINGO 的一些注意事项:

(1) “>”(或“<”)号与“>=”(或“<=”)功能相同;

(2) 变量与系数间可有空格(甚至回车),但无运算符;

(3) 变量名以字母开头,不能超过 8 个字符;

(4) 变量名不区分大小写(包括 LINGO 中的关键字);

(5) 第一行通常为“model:”,第二行为目标函数,如 min = 7 * x1 + 3 * x2,第三行开始为约束条件;

(6) 行结束为“;”;

(7) 行中注有“!”符号的后面部分为注释,如:

```
! It's Comment.
```

(8) 在模型的任何地方都可以用“TITLE”对模型命名(最多 72 个字符),如:

```
TITLE This Model is only an Example
```

(9) 表达式应化简,如 2 * X1 + 3 * X2 - 4 * X1 应写成 -2 * X1 + 3 * X2;

（10）以“END”语句作为程序的结束；

（11）“END”前对 0－1 变量说明：@ INT(name)；

（12）“END”前对整数变量说明：@ GIN(name).

3.3.2 应用软件算例

下面我们通过一个简单的例子来说明 LINGO 软件包的使用方法.

例 1 一奶制品加工厂用牛奶生产 A_1，A_2 两种奶制品，1 桶牛奶可以在甲车间用 12 小时加工成 3 公斤 A_1，或者在乙车间用 8 小时加工成 4 公斤 A_2. 根据市场需求，生产的 A_1，A_2 全部能售出，且每千克 A_1 获利 24 元，每千克 A_2 获利 16 元. 现在加工厂每天能得到 50 全部能售出，且每千克 A_1 获利 24 元，每千克 A_2 获利 16 元. 现在加工厂每天能得到 50 桶牛奶的供应，每天正式工人总的劳动时间 480 小时，并且甲车间每天至多能加工 100 千克 A_1，乙车间的加工能力没有限制. 试为该厂制定一个生产计划，使每天获利最大，并进一步讨论以下 3 个附加问题：

（1）若用 35 元可以买到 1 桶牛奶，应否作这项投资？若投资，每天最多购买多少桶牛奶？

（2）若可以聘用临时工人以增加劳动时间，付给临时工人的工资最多是几元每小时？

（3）由于市场需求变化，每千克 A_1 的获利增加到 30 元，应否改变生产计划？

设每天用 x_1 桶牛奶加工 A_1，x_2 桶牛奶加工 A_2，则模型代码如下：

```
max =72 * x1 +64 * x2;
x1 + x2 < =50;
12 * x1 +8 * x2 < =480;
3 * x1 < =100;
```

求解这个模型并做灵敏性分析，结果如下：

```
 Global optimal solution found at iteration:              0
 objective value:                                   3360.000
                  Variable        Value            Reduced Cost
                        X1        20.00000            0.000000
                        X2        30.00000            0.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1        3360.000            1.000000
                         2        0.000000            48.00000
                         3        0.000000            2.000000
                         4        40.00000            0.000000
Ranges in which the basis is unchanged:
                    Objective Coefficient Ranges
                        Current            Allowable         Allowable
            Variable    Coefficient        Increase          Decrease
                  X1    72.00000           24.00000          8.000000
                  X2    64.00000           8.000000          16.00000
```

```
        Righthand Side Ranges
   Row       Current         Allowable        Allowable
               RHS           Increase         Decrease
     2       50.00000        10.00000         6.666667
     3       480.0000        53.33333         80.00000
     4       100.0000        INFINITY         40.00000
```

结果告诉我们:这个线性规划的最优解为 $x_1=20,x_2=30$,最优值为 $z=3\ 360$,即每天用 20 桶牛奶生产 A_1,30 桶牛奶生产 A_2,可获最大利润 3 360 元. 输出中除了告诉我们问题的最优解和最优值以外,还有许多对分析结果有用的信息,下面结合题目中提出的 3 个附加问题给予说明. 3 个约束条件的右端不妨看作 3 种"资源":原料、劳动时间、车间甲的加工能力. 输出中 Slack or Surplus 给出这 3 种资源在最优解下是否有剩余:原料、劳动时间的剩余均为零,车间甲尚余 40 千克加工能力.

目标函数可以看作"效益",成为紧约束的"资源"一旦增加,"效益"必然跟着增长.输出中 Dual Prices 给出这 3 种资源在最优解下"资源"增加 1 个单位时"效益"的增量:原料增加 1 个单位(1 桶牛奶)时利润增长 48 元,劳动时间增加 1 个单位(1 小时)时利润增长 2 元,而增加非紧约束车间甲的能力显然不会使利润增长. 这里,"效益"的增量可以看作"资源"的潜在价值,经济学上称为影子价格,即 1 桶牛奶的影子价格为 48 元,1 小时劳动的影子价格为 2 元,车间甲的影子价格为零. 读者可以用直接求解的办法验证上面的结论,即将输入文件中原料约束右端的 50 改为 51,看看得到的最优值(利润)是否恰好增长 48 元. 用影子价格的概念很容易回答附加问题(1):用 35 元可以买到 1 桶牛奶,低于 1 桶牛奶的影子价格 48,当然应该做这项投资. 回答附加问题(2):聘用临时工人以增加劳动时间,付给的工资低于劳动时间的影子价格才可以增加利润,所以工资最多是每小时 2 元.

目标函数的系数发生变化时(假定约束条件不变),最优解和最优值会改变吗? 这个问题不能简单地回答. 上面输出给出了最优基不变条件下目标函数系数的允许变化范围:x_1 的系数为 $(72-8,72+24)=(64,96)$;x_2 的系数为 $(64-16,64+8)=(48,72)$. 注意:x_1 系数的允许范围需要 x_2 系数 64 不变,反之亦然. 由于目标函数的费用系数变化并不影响约束条件,因此此时最优基不变可以保证最优解也不变,但最优值变化. 用这个结果很容易回答附加问题(3):若每千克 A_1 的获利增加到 30 元,则 x_1 系数变为 $30\times3=90$,在允许范围内,所以不应改变生产计划,但最优值变为 $90\times20+64\times30=3\ 720$.

下面对"资源"的影子价格作进一步的分析. 影子价格(即在最优解下"资源"增加 1 个单位时"效益"的增量)的作用是有限制的. 每增加 1 桶牛奶利润增长 48 元(影子价格),但是,上面输出的 Current RHS 的 Allowable Increase 和 Allowable Decrease 给出了影子价格有意义条件下约束右端的限制范围:原料最多增加 10 桶牛奶,劳动时间最多增加 53 小时. 现在可以回答附加问题(1)的第 2 问:虽然应该批准用 35 元买 1 桶牛奶的投资,但每天最多购买 10 桶牛奶. 同时得到,可以用低于每小时 2 元的工资聘用临时工人以增加劳动时间,但最多增加 53.333 3 小时.

需要注意的是:灵敏性分析给出的只是最优基保持不变的充分条件,而不一定是必要条件. 比如对于上面的问题,"原料最多增加 10 桶牛奶"的含义只能是"原料增加 10 桶牛奶"时**最优基**保持不变,所以影子价格有意义,即利润的增加大于牛奶的投资. 反过来,原料增加超过 10 桶牛

奶，影子价格是否一定没有意义？最优基是否一定改变？一般来说，这是不能从灵敏性分析报告中直接得到的．此时，应该重新用新数据求解规划模型，才能做出判断．所以，从正常理解的角度来看，我们上面回答"原料最多增加10桶牛奶"并不是完全科学的．

1．状态窗口（LINGO Solver Status）

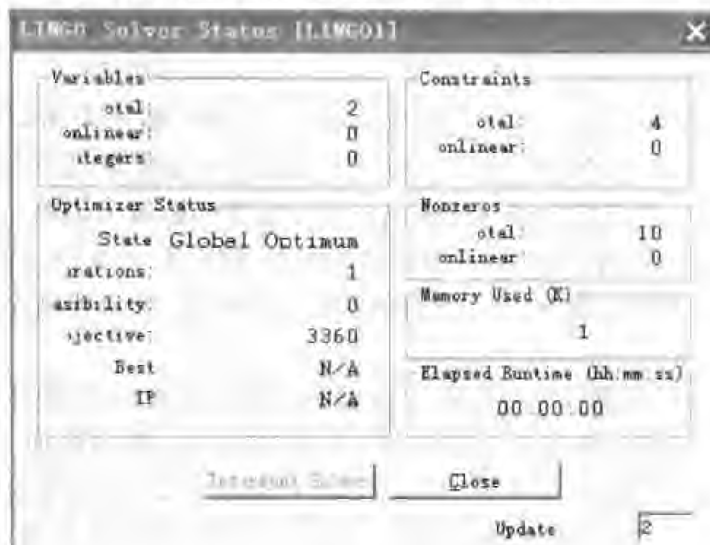


图3－1

当前状态：已达最优解

迭代次数：1次

约束不满足的"量"（不是"约束个数"）：0

当前的目标值：3 360

分支数：4

所用时间：0.00秒（太快了，还不到0.005秒）

刷新本界面的间隔：2（秒）

2．统计报告（Report/Statistics）

```
Rows =        4 Vars =        2 No.integer vars =      0  (all are linear)
 Nonzeros =       10 Constraint nonz =     5(    2 are + - 1) Density =0.833
 Smallest and largest elements in abs value =     1.00000         480.000
 No. < :    3 No. =:     0 No.  >  :     0, Obj =MAX,  GUBs < =     1
    Single cols =     0
```

第一行：模型有4行（约束3行），2个变量，两个整数变量（没有0－1变量）．

第二行：非零系数10个，约束中非零系数5个（其中2个为1或－1），模型密度为0.883（密度＝非零系数/[行数*（变量数＋1）]）．

第三行：按绝对值看，系数最小、最大分别为1和480．

第四行：模型目标为极小化；小于等于、等于、大于等于约束分别有3、0、0个；广义上界约束（GUBS）不超过1个．所谓GUBS，是指一组不含有相同变量的约束．

第五行：只含1个变量的约束个数＝0个；冗余的列数＝0个．

3．灵敏性分析（Range，Ctrl＋R）

用该命令产生当前模型的灵敏性分析报告：研究当目标函数的费用系数和约束右端项在什么范围变化（此时假定其他系数不变）时，最优基保持不变．灵敏性分析是在求解模型时作出的，因此在求解模型时灵敏性分析是激活状态，但是默认是不激活的．为了激活灵敏性分析，运行LINGO|Options…，选择General Solver Tab，在Dual Computations列表框中，选择Prices and Ranges选项．灵敏性分析耗费相当多的求解时间，因此当速度很关键时，就没有必要激活它．

例 2 （奶制品的生产销售计划）

例 1 给出的条件不变. 为了增加工厂的获利，开发了奶制品的深加工技术：用 2 小时和 3 元加工费，可将 1 千克 A_1 加工成 0.8 千克高级奶制品 B_1，也可将 1 千克 A_2 加工成 0.75 千克高级奶制品 B_2，每千克 B_1 能获利 44 元，每千克 B_2 能获利 32 元，试为该厂制定一个生产计划，使每天获利最大，并进一步讨论以下 2 个附加问题：

1）若投资 30 元可以增加供应 1 桶牛奶，投资 3 元可增加 1 小时劳动时间，应否作这项投资？若每天投资 150 元，可赚回多少？

2）每千克高级奶制品 B_1、B_2 的获利经常有 10% 的波动，对制定的生产销售计划有无影响，若每千克 B_1 获利下降 10%，计划应该变化吗？

（1）符号说明

设出售 x_1 千克 A_1，x_2 千克 A_2，x_3 千克 B_1，x_4 千克 B_2，x_5 千克 A_1 加工 B_1，x_6 千克 A_2 加工 B_2.

（2）建立模型

目标函数：$\max\ z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$

约束条件：

1）原料供应：$\dfrac{x_1 + x_5}{3} + \dfrac{x_2 + x_6}{4} \leqslant 50$

2）劳动时间：$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \leqslant 480$

3）加工能力：$x_1 + x_5 \leqslant 100$

4）附加约束：$x_3 = 0.8x_5$，$x_4 = 0.75x_6$

5）非负约束：$x_1, \cdots, x_6 \geqslant 0$

所以模型为：

$$\max\ z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \leqslant 600\\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_5 + 4x_6 \leqslant 480\\ x_1 + x_5 \leqslant 100\\ x_3 = 0.8x_5\\ x_4 = 0.75x_6\\ x_1, \cdots, x_6 \geqslant 0\end{cases}$$

（3）模型求解

1）程序

```
model:
title 奶制品的生产销售计划;
max =24 * x1 +16 * x2 +44 * x3 +32 * x4 -3 * x5 -3 * x6;
4 * x1 +3 * x2 +4 * x5 +3 * x6 <600;
4 * x1 +2 * x2 +6 * x5 +4 * x6 <480;
x1 +x5 <100;
x3 =0.8 * x5;
```

```
x4 =0.75 * x6;
end
```

2）计算结果

```
Global optimal solution found at iteration:        4
Objective value:                                   3460.800
```

Model Title:奶制品的生产销售计划

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	1.680000
X2	168.0000	0.000000
X3	19.20000	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.00000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3460.800	1.000000
2	0.000000	3.160000
3	0.000000	3.260000
4	76.00000	0.000000
5	0.000000	44.00000
6	0.000000	32.00000

结论：该厂制定的一个生产计划，使每天获利最大值为 3 460.800.

问题的解答

1）若投资 30 元可以增加供应 1 桶牛奶，投资 3 元可增加 1 小时劳动时间，应否作这项投资？若每天投资 150 元，可赚回多少？

因为增加 1 桶牛奶使利润增长 $3.16 \times 12 = 37.92$；增加 1 小时时间使利润增长 3.26.

所以投资 150 元增加 5 桶牛奶，可赚回 189.6 元.（大于增加时间的利润增长.）

2）每千克高级奶制品 B_1、B_2 的获利经常有 10% 的波动，对制定的生产销售计划有无影响，若每千克 B_1 获利下降 10%，计划应该变化吗？

做灵敏性分析：

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	24.00000	1.680000	INFINITY
X2	16.00000	8 150000	2.100000
X3	44.00000	19.75000	3.166667
X4	32.00000	2.026667	INFINITY
X5	-3.000000	15.80000	2.533333
X6	-3.000000	1.520000	INFINITY

```
                    Righthand Side Ranges
     Row          Current          Allowable          Allowable
                    RHS            Increase           Decrease
      2          600.0000          120.0000           280.0000
      3          480.0000          253.3333           80.00000
      4          100 0000          INFINITY           76.00000
      5               0.0          INFINITY           19.20000
      6               0.0          INFINITY                0.0
```

显然可以看出：B_1 获利下降 10%，超出 x_3 系数允许范围(4.4 > 3.166667)；

B_2 获利上升 10%，超出 x_4 系数允许范围(3.2 > 2.026667).

结论：每千克高级奶制品 B_1、B_2 的获利经常有 10% 的波动，对制定的生产销售计划有影响.

生产计划应重新制定：比如将 x_3 的系数改为 39.6 计算，会发现结果有很大变化.

例 3 某储蓄所每天的营业时间为上午 9:00 到下午 17:00，根据经验，每天不同时间段所需要服务员的数量为：

时间段(时)	9~10	10~11	11~12	12~13	13~14	14~15	15~16	16~17
服务员数量	4	3	4	6	5	6	8	8

储蓄所可以雇用全时和半时两类服务员. 全时服务员每天报酬为 100 元，从上午 9:00 到下午 17:00 工作，但中午 12:00 到下午 14:00 之间必须安排 1 小时的午餐时间；储蓄所每天可以雇用不超过 3 名的半时服务员，每个半时服务员必须连续工作 4 小时，报酬为 40 元. 问：

1) 该储蓄所应该如何雇用全时和半时两类服务员？

2) 如果不能雇用半时服务员，每天至少增加多少经费？

3) 如果雇用半时服务员的数量没有限制，每天可以减少多少经费？

(1) 数学建模

符号说明：x1、x2 分别为全时服务员在 12:00~13:00 和 13:00~14:00 安排午餐的人数；y1、y2、y3、y4、y5 分别为从 9:00、10:00、11:00、12:00、13:00 开始工作的半时服务员人数.

```
model:
title   银行招聘计划;
min =100 * x1 +100 * x2 +40 * y1 +40 * y2 +40 * y3 +40 * y4 +40 * y5;
x1 + x2 + y1 > 5;
x1 + x2 + y1 + y2 > 8;
x1 + x2 + y1 + y2 + y3 > 6;
  x2 + y1 + y2 + y3 + y4 > 5;
x1      + y2 + y3 + y4 + y5 > 4;
x1 + x2      + y3 + y4 + y5 > 6;
x1 + x2           + y4 + y5 > 9;
x1 + x2                + y5 > 7;
```

```
    y1 +y2 +y3 +y4 +y5 <4;        ! (1)问
    ! y1 +y2 +y3 +y4 +y5 <0;        ! (2)问
    ! y1 +y2 +y3 +y4 +y5 >0;        ! (3)问
@ gin(x1);@ gin(x2);@ gin(y1);@ gin(y2);@ gin(y3);@ gin(y4);@ gin(y5);
end
```

(2) 模型解答

对(1)问有如下计算结果.

```
Rows =      10 Vars =       7 No.integer vars =       6  (all are linear)
Nonzeros =       55 Constraint nonz =     39(    39 are + - 1)Density =0.688
Smallest and largest elements in abs value =  1.00000      100.000
No. < :    1 No. = :    0 No. > :    8,Obj =MIN,GUBs < =     2
Single cols =   0
Optimal solution found at step:         8
Objective value:                 820.0000
Branch count:                    1
Model Title:银行招聘计划
                    Variable          Value         Reduced Cost
                          X1       2.000000           0.0000000
                          X2       5.000000           0.0000000
                          Y1       1.000000            40.00000
                          Y2      0.0000000            40.00000
                          Y3      0.0000000            40.00000
                          Y4       2.000000            40.00000
                          Y5      0.0000000           -60.00000
                      Row     Slack or Surplus        Dual Price
                        1          820.0000           1.000000
                        2          3.000000          0.0000000
                        3         0.0000000          0.0000000
                        4          2.000000          0.0000000
                        5          3.000000          0.0000000
                        6         0.0000000          0.0000000
                        7          3.000000          0.0000000
                        8         0.0000000          0.0000000
                        9         0.0000000          -100.0000
                       10          1.000000          0.0000000
```

由此可知,该储蓄所应雇用 7 名全时服务员,其中安排 2 人在 12 时 ~ 13 时用午餐,其余 5 人在 13 时 ~ 14 时用午餐;并在 10 ~ 14,12 ~ 16,13 ~ 17 三时段各雇用 1 名半时服务员,符合要求且花费最少,为 820 元.

用 LINGO 类似可得(2)(3)的结论:

(2)′ 如果不能雇用半时服务员,每天至少增加 80 元;

(3)′ 若雇用半时服务员的数量没有限制,每天可以减少经费 260 元.

3.4 建模案例:投资的收益和风险

3.4.1 问题的提出

市场上有 n 种资产 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以选择作为投资项目,现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资. 这 n 种资产在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i,风险损失率为 q_i. 投资越分散,总的风险越小,总体风险可用投资的 S_i 中最大的一个风险来度量.

购买 S_i 时要付交易费(费率 p_i),当购买额不超过给定值 u_i 时,交易费按购买 u_i 计算. 另外,假定同期银行存款利率是 $r_0(r_0=5\%)$,既无交易费又无风险.

已知 $n=4$ 时相关数据如下:

S_i	r_i(%)	q_i(%)	p_i(%)	u_i(元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案,即用给定的资金 M,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,且总体风险尽可能小.

3.4.2 基本假设和符号规定

基本假设:

1. 投资数额 M 相当大,为了便于计算,假设 $M=1$;
2. 投资越分散,总的风险越小;
3. 总体风险用投资项目 S_i 中最大的一个风险来度量;
4. n 种资产 S_i 之间是相互独立的;
5. 在投资的这一时期内,r_i,p_i,q_i,r_0 为定值,不受意外因素影响;
6. 净收益和总体风险只受 r_i,p_i,q_i 影响,不受其他因素干扰.

符号规定:

S_i——第 i 种投资项目,如股票,债券

r_i,p_i,q_i——分别为 S_i 的平均收益率、交易费率、风险损失率

u_i——S_i 的交易定额　　　　r_0——同期银行利率

x_i——投资项目 S_i 的资金　　　　a——投资风险度

Q——总体收益　　　　ΔQ——总体收益的增量

3.4.3 问题分析与模型建立

1. 总体风险用所投资的 S_i 中最大的一个风险来衡量，即 $\max\{q_i x_i | i=1,2,\cdots,n\}$.

2. 购买 S_i 所付交易费是一个分段函数，即

$$\text{交易费}\begin{cases} p_i x_i, & x_i > u_i \\ p_i u_i, & x_i \leqslant u_i \end{cases}$$

而题目所给定的定值 u_i（单位：元）相对总投资 M 很小，$p_i u_i$ 更小，可以忽略不计，这样购买 S_i 的净收益为 $(r_i - p_i)x_i$.

3. 要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型：

$$\text{目标函数}\begin{cases} \max \sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \\ \min\{\max\{q_i x_i\}\} \end{cases}$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M \\ x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

4. 模型简化：

(1) 在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限 a，使最大的一个风险 $q_i x_i / M \leqslant a$，可找到相应的投资方案. 这样把多目标规划变成一个目标的线性规划.

模型 1 固定风险水平，优化收益

$$\text{目标函数：} Q = \max \sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$$

$$\text{约束条件：}\begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \leqslant a \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

(2) 若投资者希望总盈利至少达到水平 k 以上，在风险最小的情况下寻找相应的投资组合.

模型 2 固定盈利水平，极小化风险

$$\text{目标函数：} R = \min\{\max\{q_i x_i\}\}$$

$$\text{约束条件：}\begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \geqslant k, \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

(3) 投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时，希望选择一个令自己满意的投资组合. 因此对风险、收益赋予权重 $s(0 < s \leqslant 1)$，s 称为投资偏好系数.

模型 3 目标函数：$\min s\{\max\{q_i x_i\}\} - (1-s)\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$

约束条件 $\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, x_i\geq 0, i=0,1,2,\cdots,n$

3.4.4 模型 1 的求解

对表中给定的数据,模型 1 为:

$$\min f=(-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185)(x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_0+1.01x_1+1.02x_2+1.045x_3+1.065x_4=1\\ 0.025x_1\leq a\\ 0.015x_2\leq a\\ 0.055x_3\leq a\\ 0.026x_4\leq a\\ x_i\geq 0(i=0,1,\cdots,4)\end{cases}$$

由于 a 是任意给定的风险度,到底怎样给定没有一个准则,不同的投资者有不同的风险度.我们从 $a=0$ 开始,以步长 $\Delta a=0.001$ 进行循环搜索,编制程序 xxgh5.m 如下:

```
a=0;
while(1.1-a)>1
c=[-0.05 -0.27 -0.19 -0.185 -0.185];
Aeq=[1 1.01 1.02 1.045 1.065];
beq=[1];
A=[0 0.025 0 0 0;0 0 0.015 0 0;0 0 0 0.055 0;0 0 0 0 0.026];
b=[a;a;a;a];
vlb=[0,0,0,0,0];
vub=[];
[x,val]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub);
a
x=x'
Q=-val
plot(a,Q,'.')
axis([0 0.1 0 0.5])
hold on
a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

3.4.5 结果分析

由计算结果及图 3-2,可得以下结论:

1. 风险大,收益也大.

2. 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致. 即，冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资.

3. 图 3-2 曲线上的任一点都表示该风险水平的最大可能收益和该收益要求的最小风险. 对于不同风险的承受能力，选择该风险水平下的最优投资组合.

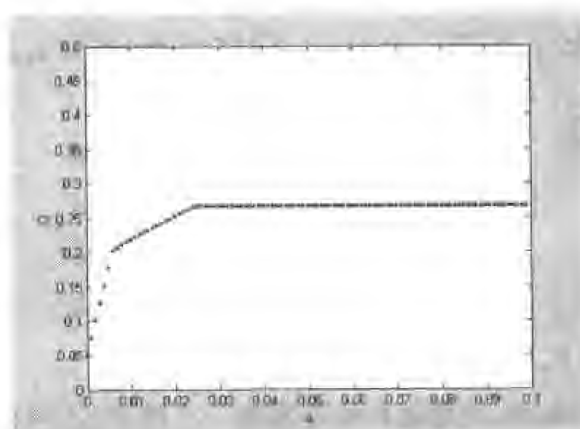


图 3-2

4. 在 $a=0.006$ 附近有一个转折点，在这一点左边，风险增加很少时，利润增长很快；在这一点右边，风险增加很大时，利润增长很缓慢. 所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的拐点作为最优投资组合，大约是 $a^*=0.6\%$，$Q^*=20\%$，所对应投资方案为：

风险度	收益	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.006 0	0.201 9	0	0.240 0	0.400 0	0.109 1	0.221 2

3.5 习　　题

1. 某鸡场有 1000 只鸡，用动物饲料和谷物混合喂养. 每天每只鸡平均食混合饲料 0.5 kg，其中动物饲料所占比例不能少于 20%. 动物饲料每千克 0.30 元，谷物饲料每千克 0.18 元，饲料公司每周仅保证供应谷物饲料 6 000 kg，问饲料怎样混合，才能使成本最低？

2. 某工厂用 A_1、A_2 两台机床加工 B_1、B_2、B_3 三种不同零件. 已知在一个生产周期内 A_1 只能工作 80 机时；A_2 只能工作 100 机时. 一个生产周期内计划加工 B_1 为 70 件、B_2 为 50 件、B_3 为 20 件. 两台机床加工每个零件的时间和加工每个零件的成本，分别如下列各表所示：

加工每个零件时间表(单位：机时/个)

机床 \ 零件	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	1	1	3

加工每个零件成本表(单位:元/个)

机床 \ 零件	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	5
A_2	3	3	6

问怎样安排两台机床一个周期的加工任务,才能使加工成本最低?

3. 某工厂利用两种原料甲、乙生产 A_1、A_2、A_3 三种产品. 如果每月可供应的原料数量(单位:t),每万件产品所需各种原料的数量及每万件产品的价格如下表所示:

原 料	每万件产品所需原料(t)			每月原料供应量(t)
	A_1	A_2	A_3	
甲	4	3	1	180
乙	2	6	3	200
价格(万元/万件)	12	5	4	

(1) 试制定每月和最优生产计划,使得总收益最大;

(2) 对求得的最优生产计划进行灵敏度分析.

4. 某医院负责人每日至少需要下列数量的护士:

班 次	时 间	最少护士数
1	6 时 ~ 10 时	60
2	10 时 ~ 14 时	70
3	14 时 ~ 18 时	60
4	18 时 ~ 22 时	50
5	22 时 ~ 02 时	20
6	02 时 ~ 06 时	30

每班的护士在值班开始时向病房报到,连续工作 8 个小时. 医院领导为满足每班所需要的护士数,最少需雇用多少护士?

5. 某工厂生产 A_1、A_2 两种型号的产品都必须经过零件装配和检验两道工序,如果每天可用于零件装配的工时只有 100 h,可用于检验的工时只有 120 h,各型号产品每件需占用各工序时数和可获得的利润如下表所示:

工序	产 品		可 用 工 时
	A_1	A_2	
装配	2	3	100
检验	4	2	120
利润(元/件)	6	4	

(1) 试写出此问题的数学模型,并求出最优化生产方案.

(2) 对产品 A_1 的利润进行灵敏度分析.

(3) 对装配工序的工时进行灵敏度分析.

(4) 如果工厂试制了 A_3 型产品,每件 A_3 产品需装配工时 4 h,检验工时 2 h,可获利润 5 元,

那么该产品是否应投入生产?

6. 有两个煤厂 A、B,每月进煤分别不少于 60 t、100 t,它们担负供应三个居民区用煤任务.这三个居民区每月需要用煤分别为 45 t、75 t、40 t;A 厂离这三个居民区分别为 10 km、5 km、6 km,B 厂离这三个居民区分别为 4 km、8 km、15 km,问这两煤矿厂如何分配供煤,才能使总运输量最小?

7. 某工厂制造三种产品,生产这三种产品需要三种资源:技术服务、劳动力和行政管理.下表列出了三种单位产品对每种资源的需要量:

		资源			利润
		技术服务	劳动力	行政管理	
产品	Ⅰ	1	10	2	10
	Ⅱ	1	4	2	6
	Ⅲ	1	5	6	4

现有 100 h 的技术服务、600 h 的劳动力和 300 h 的行政管理时间可使用,求最优产品品种规划.且回答下列问题:

(1) 若产品Ⅲ值得生产的话,它的利润是多少?假使将产品Ⅲ的利润增加至 25/3 元,求获利最多的产品品种规划.

(2) 确定全部资源的影子价格.

(3) 制造部门提出建议,要生产一种新产品,该种产品需要技术服务 1 h、劳动力 4 h 和行政管理 4 h.销售部门预测这种产品售出时有 8 元的单位利润.管理部门应有怎样的决策?

(4) 假定该工厂至少生产 10 件产品Ⅲ,试确定最优产品品种规划.

8. 知某工厂计划生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品,各产品需要在 A、B、C 设备上加工,有关数据如下:

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	设备有效台时(每月)
A	8	2	10	300
B	10	5	8	400
C	2	13	10	420
单位产品利润(千元)	3	2	2.9	

试回答:

(1) 如何发挥生产能力,使生产盈利最大?

(2) 若为了增加产量,可借用别的工厂设备 B,每月可借用 60 台时,租金 1.8 万元,借用设备 B 是否合算?

(3) 若另有两种新产品Ⅳ、Ⅴ,其新产品Ⅳ需用设备 A 为 12 台时、B 为 5 台时、C 为 10 台时,单位产品盈利 2.1 千元;新产品Ⅴ需用设备 A 为 4 台时、B 为 4 台时、C 为 12 台时,单位产品盈利 1.87 千元.如 A、B、C 的设备台时不增加,这两种新产品投产在经济上是否合算?

(4) 对产品工艺重新进行设计,改进结构.改进后生产每件产品Ⅰ需用设备 A 为 9 台时、设备 B 为 12 台时、设备 C 为 4 台时,单位产品盈利 4.5 千元,这时对原计划有何影响?

第 4 章　整数线性规划

在某些线性规划问题中，变量只有取整数值才有意义，这时约束条件中还需添上变量取整数值的限制. 这就是**整数线性规划**问题，其一般形式是

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i(i = 1,2,\cdots,m)\\ x_j \text{ 为非负整数}(j = 1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

这称为纯整数规划；若其中只有部分变量要求取整数，则称为混合整数规划. 这种问题的解法比一般线性规划的解法要复杂，以下仅就两个基本方法作初步介绍.

4.1　割平面法

割平面法的基本思想是首先不考虑整数性要求，用单纯形法求出所给问题的最优解，若其中每个变量恰好都取整数值，则它正好是所求的解；否则，就设法把这个最优的极点，连同它的一个邻域，从可行解集合中“切除”，但保留其中全部格点（这样的“切除”，并不影响问题的结果）. 对可行解剩下部分重复上述步骤，范围逐步缩小，直至找到最优解为止. 这里的关键是如何实现上述的“切除”. 事实上，这将通过一个附加的约束条件（称为割平面）来实现，故称为割平面法. 具体说明如下：

考虑整数线性规划（IP）：

$$\min z = \boldsymbol{CX} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX} = b & (2)\\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 & (3)\\ x_j \text{ 为整数}(j=1,2,\cdots,n) & (4)\end{cases}$$

设解（1）~（3）式所得结果为

$$\begin{cases}x_1 + b_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + b_{1n}x_n = b_{10}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m + b_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + b_{mn}x_n = b_{m0}\end{cases} \tag{5}$$

$$z = z_0 + C'_{m+1}x_{m+1} + \cdots + C'_n x_n$$

其中，$b_{i0} \geqslant 0, C'_j \geqslant 0(i = 1,\cdots,m; j = m+1,\cdots,n)$，最优解 $\boldsymbol{X}^0 = (b_{10},\cdots,b_{m0},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 可作为原问题（IP）的第一个逼近解. 于是

1. 若全部 b_{i0} 为整数，则 $\boldsymbol{X}^0$ 即为原问题（IP）的解；

2. 若存在 b_{r0} 不为整数，则考虑约束方程组（5）中相应的方程

$$x_r + \sum_{j=m+1}^{n} b_{rj}x_j = b_{r0} \tag{6}$$

它可写成

$$x_r + \sum_{j=m+1}^{n} [b_{rj}]x_j + \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j = [b_{r0}] + f_{r0} \tag{7}$$

这里,符号$[t]$表示不超过 t 的最大整数,$f_{rj} = b_{rj} - [b_{rj}]$,$0 \leqslant f_{rj} \leqslant 1$;$f_{r0} = b_{r0} - [b_{r0}]$,$0 < f_{r0} < 1$. 由(7)式有

$$x_r + \sum_{j=m+1}^{n} [b_{rj}]x_j \leqslant [b_{r0}] + f_{r0} \tag{8}$$

若原问题(IP)有整数解,则由(8)式又可得

$$x_r + \sum_{j=m+1}^{n} [b_{rj}]x_j \leqslant [b_{r0}]$$

或

$$x_r + \sum_{j=m+1}^{n} [b_{rj}]x_j + y_r = [b_{r0}], \quad y_r \geqslant 0 \text{ 为整数} \tag{9}$$

(9)式减去(7)式,得

$$y_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j = -f_{r0} \tag{10}$$

这是在原问题有整数解的假定下导出来的新的约束条件,称为**割平面方程**. 用来导出(10)式的方程(6)称为**诱导方程**.

定理　方程组(5)的非负整数解与方程组

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} b_{ij}x_j = b_{i0}(i = 1,2,\cdots,m) \\ y_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j = -f_{r0} \end{cases} \tag{11}$$

的非负整数解一一对应.

证明　方程组(11)的非负整数解显然是(5)的非负整数解.

设 $x_1', \cdots, x_m', x_{m+1}', \cdots, x_n'$ 为(5)式的非负整数解,代入(10)式,得

$$y_r = -f_{r0} + \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j' \tag{12}$$

或

$$y_r = [b_{r0}] - b_{r0} + \sum_{j=m+1}^{n} (b_{rj} - [b_{rj}])x_{rj}'$$

$$= [b_{r0}] - \sum_{j=m+1}^{n} [b_{rj}]x_j' - x_r' \tag{12'}$$

因$[b_{r0}]$,$[b_{rj}]$,x_j',x_r' 均为整数,故由(12)'式知 y_r 为整数;又 $f_{rj} \geqslant 0$,$x_j' \geqslant 0$,故由(12)式知

$$y_r \geqslant -f_{r0} > -1$$

由此可得,y_r 为整数,且 $y_r \geqslant 0$,即(5)式的非负整数解也满足(10)式.

根据这个定理,可得结论:原整数线性规划(IP)与整数线性规划

$$\min z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX = b \\ y_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j = -f_{r0} \\ x_i\ (i=1,\cdots,m),\ y_r \text{ 均为非负整数} \end{cases}$$

是等价的.

例 1

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \end{cases}$$

引入松弛变量和剩余变量 x_3, x_4, x_5 后,用单纯形法求出不计整数值限制的最优解,如表 4-1.

表 4-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	0	4/3	5/3	23/3
x_1	1	0	0	1/3	2/3	8/3
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	1/3
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	7/3

最优解 $X^1 = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ 作为第一次逼近,它不是整数解,故可取相应的方程

$$x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{8}{3}$$

作为诱导方程,从而得到割平面方程:

$$y_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = -\frac{2}{3}$$

将割平面方程添入表 4-1,可得表 4-2.

表 4-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
z	0	0	0	4/3	5/3	0	23/3
x_1	1	0	0	1/3	2/3	0	8/3
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	0	1/3
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	0	7/3
x_5	0	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3

显然得到一个非可行的正则解，再用对偶单纯形法求最优解，作为第二次逼近：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
z	0	0	0	1/2	0	5/2	6
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	-1/2	0	1/2	0
x_3	0	0	1	-1	0	2	1
x_5	0	0	0	1/2	1	-3/2	1

于是，已得整数值的最优解为

$$x_1 = 2,\ x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = x_5 = 1$$

目标值为 $z_{max} = 6$.

4.2 分支定界法

分支定界法可适用于纯整数规划以及混合整数规划.

例 1 $\min z = x_1 + 3x_2$

$$R: \begin{cases} x_2 \geqslant 3.13 \\ 22x_1 + 34x_2 \geqslant 285 \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \end{cases}$$

解 (1) 忽略 x_1, x_2 是整数这一条件，求得最优解为

$$x_1 = 8.12,\ x_2 = 3.13,\ z_{min} = 17.5$$

这不是整数解. 于是，可将 R 中与 x_1 有关的区域分成 R_1、R_2 两个区域，即 $x_1 \geqslant 8.12$ 和 $x_1 < 8.12$. 因 x_1 要求取整数，所以这两个局部约束区域也可写成整数形式 $x_1 \geqslant 9$ 和 $x_1 \leqslant 8$，即把 R 分成

$$R_1: \begin{cases} x_1 \geqslant 9 \\ x_2 \geqslant 3.13 \\ 22x_1 + 34x_2 \geqslant 285 \end{cases} \qquad R_2: \begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \geqslant 3.13 \\ 22x_1 + 34x_2 \geqslant 285 \end{cases}$$

(2) 在 R_1 内求最优解，得

$$x_1 = 9, x_2 = 3.13,\ z_{min} = LB_2 = 18.39$$

(3) 同样地，在 R_2 内求最优解，得

$$x_1 = 8, x_2 = 3.12,\ z_{min} = LB_3 = 17.62$$

(4) 由于(2)、(3)所得的解都不是整数解，且 $LB_3 < LB_2$，所以 z_{min} 在 R_2 内的值就可能比在 R_1 内的值小. 于是进一步将 R_2 分成两个区域，注意到由(3)所得的非整数解 $x_2 = 3.12$，且要求 x_2 是整数，故对 R_2 分别追加条件 $x_2 \geqslant 4$ 和 $x_2 \leqslant 3$，对应地将 R_2 分成 R_{21} 和 R_{22}.

(5) 求出 R_{21} 内的最优解

$$x_1 = 6.77, x_2 = 4,\ z_{min} = LB_4 = 18.77$$

在 R_{22} 中因新的约束 $x_2 \leqslant 3$ 和原有的约束 $x_2 \geqslant 3.13$ 矛盾，故 R_{22} 中没有可行解.

（6）对区域 R_1 和 R_{21} 进行比较，有 $LB_2 < LB_4$，所以应转向在 R_1 中搜索. 因 R_1 中的非负整数解 $x_2 = 3.13$，把 R_1 分为 $x_2 \geqslant 4$ 和 $x_2 \leqslant 3$，对应地得到两个约束区域：

$$R_{11}:\begin{cases} x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 9 \\ x_2 \geqslant 3.13 \\ 22x_1 + 34x_2 \geqslant 285 \end{cases} \qquad R_{12}:\begin{cases} x_2 \leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 9 \\ x_2 \geqslant 3.13 \\ 22x_1 + 34x_2 \geqslant 285 \end{cases}$$

（7）R_{12} 显然无可行解，在 R_{11} 中的最优解是

$$x_1 = 9, x_2 = 4,\ z_{min} = LB_5 = 21$$

这个解满足整数解的条件，但是否是最优解呢？因有 $LB_4 < LB_5$，故最优解可能位于 R_{21} 中.

（8）对 R_{21} 分别追加条件 $x_1 \geqslant 7$ 和 $x_1 \leqslant 6$，R_{21} 又分成两个局部区域 R_{211} 和 R_{212}. R_{211} 中的最优解是

$$x_1 = 7, x_2 = 4,\ z_{min} = LB_6 = 19$$

R_{212} 的最优解是

$$x_1 = 6, x_2 = 4.5,\ z_{min} = LB_7 = 19.5$$

可见，R_{211} 中的最优解满足整数条件，同时目标函数的下限值 LB_6 比其他局部区域的下限值小，即 $LB_6 < LB_7 < LB_5$，所以 R_{212} 或 R_{11} 没有必要进一步搜索. 因此，最后得到所求的最优整数解是

$$x_1 = 7, x_2 = 4,\ z_{min} = LB_6 = 19$$

需要指出的是，分支定界法并不能保证用最少的迭代次数达到最优解，在最不顺利的情况下，甚至需要对全部区域进行搜索. 但根据经验，一般情况下，它还是一个节省工时的有效方法，对于解整数规划问题是应用得最广泛的方法.

4.3 习 题

1. 用割平面法求解

$$\max\ (4x_1 + 5x_2 + x_3)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 13 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \text{ 为整数} \end{cases}$$

2. 用割平面法求解

$$\min\ (4x_1 + 5x_2)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 为整数} \end{cases}$$

3. 用分支定界法求解

$$\min\ (4x_1 + 4x_2)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 2x_1 - 2x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 为整数} \end{cases}$$

4. 用分支定界法求解

$$\min\ (10x_1 + 9x_2)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

第 5 章　无约束优化

建立无约束优化问题的数学模型，首先要确定问题的决策变量，用 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 表示 n 维向量，然后构造模型的目标函数 $f(X)$. 一般地，这类模型可表示为：

$$\min_{X\in\mathbf{R}^n} f(X)$$

例　选址问题：某市燃气公司计划要建一个煤气供应站，该站要向城市中有固定位置的 m 个用户供货. 对于选定的坐标系而言，已知第 i 个用户的位置（坐标）为 (a_i,b_i)，$i=1,\cdots,m$. 如果只考虑直线距离，问如何确定这个煤气站的位置，才能使总的运输距离最短？

解　设煤气站的位置为 (x_1,x_2)，则第 i 个用户到该站的直线距离为

$$\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}$$

故 m 个用户到该站的总距离为

$$f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{m}\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}$$

故选址问题可归结为求变量 x_1,x_2，使得

$$\min f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{m}\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}$$

5.1　数学预备知识

为方便起见，我们将后面经常遇到的有关数学知识作一个简介.

5.1.1　梯度

定义 1　设 $f(X)$ 是定义在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的可微函数，则我们称

$$\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(X)}{\partial x_n}\right)^T$$

为函数 $f(X)$ 在点 X 处的**梯度**，记为 $\nabla f(X)$.

由数学分析可知：

(1) **梯度方向**是函数 $f(X)$ 在点 X 处增长最快的方向，即函数变化率最大的方向；**负梯度方向**是函数 $f(X)$ 在点 X 处下降最快的方向.

(2) **梯度的模**：$\|\nabla f(X)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}$ 是函数 $f(X)$ 沿这一方向的变化率.

(3) 满足梯度 $\nabla f(X^*)=0$ 的点称为**驻点**，在区域内部，极值点必为驻点，而驻点不一定是极值点.

5.1.2　黑塞(Hesse)矩阵

定义 2　设 $f(X)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的二阶可微函数,则以其二阶偏导数为元素构成的下述 $n\times n$ 矩阵称为函数 $f(X)$ 在点 X 的**黑塞(Hesse)矩阵**,记为 $H(X)$ 或 $\nabla^2 f(X)$. 当 $f(X)$ 二阶偏导数连续时,$H(X)$ 是对称矩阵.

$$H(X)=\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

当 $f(X)$ 是二次函数:$f(X)=\frac{1}{2}X^{\mathrm T}AX+B^{\mathrm T}X+C$ 时,$\nabla^2 f(X)=A$,即二次函数的黑塞矩阵与点 X 的取值无关.

例 1　设 $f(X)=x_1^4+2x_2^3+3x_3^2-x_1^2x_2+4x_2x_3-x_1x_3^2$,求 $\nabla f(X)$ 和 $\nabla^2 f(X)$.

解　因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=4x_1^3-2x_1x_2-x_3^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=6x_2^2-x_1^2+4x_3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=6x_3+4x_2-2x_1x_3$, 所以

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}4x_1^3-2x_1x_2-x_3^2\\ 6x_2^2-x_1^2+4x_3\\ 6x_3+4x_2-2x_1x_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=12x_1^2-2x_2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=-2x_1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=-2x_3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=12x_2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=6-2x_1$$

从而

$$\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix}12x_1^2-2x_2 & -2x_1 & -2x_3\\ -2x_1 & 12x_2 & 4\\ -2x_3 & 4 & 6-2x_1\end{bmatrix}$$

5.1.3　多元函数的泰勒(Taylor)展开式

定理 1(多元函数的泰勒(Taylor)展式)　设 $f(X)$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数,且 $X^*\in D$ 为一给定点,$X\in D$ 为任一点,那么

1. 若 $f(X)$ 连续可微,则存在 $\theta\in(0,1)$,使

$$f(X)=f(X^*)+\nabla f(\xi)^{\mathrm T}(X-X^*)$$

其中 $\xi=X^*+\theta(X-X^*)$;

2. 若 $f(X)$ 二次连续可微,则存在 $\theta\in(0,1)$,使

$$f(X)=f(X^*)+\nabla f(X^*)^{T}(X-X^*)+\frac{1}{2}(X-X^*)^{T}\nabla^2 f(\xi)^{T}(X-X^*)$$

其中 $\xi=X^*+\theta(X-X^*)$.

3. 若 $f(X)$ 二次连续可微,则

$$f(X)=f(X^*)+\nabla f(X^*)^{T}(X-X^*)+\frac{1}{2}(X-X^*)^{T}\nabla^2 f(X^*)^{T}(X-X^*)+o(\|X-X^*\|^2)$$

5.1.4 正定矩阵、负定矩阵、半定矩阵、不定矩阵

设有实对称矩阵 $A_{n\times n}$,记其各阶主子式为 A_i, $i=1,2,\cdots,n$,则正定矩阵、负定矩阵、半定矩阵、不定矩阵等概念及其判定条件如下表:

名　称	定　义	充要条件
正定矩阵	特征值都大于零的实对称矩阵	$A_i>0, i=1,2,\cdots,n$
半正定矩阵	特征值都不小于零的实对称矩阵	$\det A=0$ $A_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n-1$
负定矩阵	特征值都小于零的实对称矩阵	$A_i\begin{cases}<0, & i\text{ 为奇数}\\ >0, & i\text{ 为偶数}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$
半负定矩阵	特征值都不大于零的实对称矩阵	$\det A=0$ $A_i\begin{cases}\leq 0, & i\text{ 为奇数}\\ \geq 0, & i\text{ 为偶数}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n-1$
不定矩阵	特征值既有大于零又有小于零的实对称矩阵	有两个奇数阶主子式,其中一个为正,另一个为负

5.2 无约束最优化问题的解

5.2.1 无约束最优化问题的最优性条件

考虑无约束的最优化问题:

$$\min_{X\in\mathbf{R}^n} f(X),\ \text{其中} f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1 \tag{1}$$

首先我们介绍怎样用黑塞矩阵判断驻点的性质,然后给出极小点存在的必要条件和充分条件.

1. 用黑塞矩阵判断驻点的性质

已知函数 $f(X)$ 的驻点 X^*,可以利用驻点 X^* 处的黑塞矩阵 $\nabla^2 f(X^*)$ 来判断驻点的性质:

(1) 若 $\nabla^2 f(X^*)$ 是正定的,则驻点 X^* 是极小点;

(2) 若 $\nabla^2 f(X^*)$ 是负定的,则驻点 X^* 是极大点;

(3) 若$\nabla^2 f(X^*)$是不定的,则驻点X^*不是极值点;

(4) 若$\nabla^2 f(X^*)$是半定的,则驻点X^*可能是极值点,可能不是极值点,需视高阶导数的性质而定.

2. 极值点的必要条件和充分条件

定义 1　对于问题(1),设$X^* \in \mathbf{R}^n$是任一给定点,P是非零向量,若存在一个数$\delta > 0$,使得对于任意$\lambda \in (0,\delta)$,都有$f(X^* + \lambda P) \leqslant f(X^*)$,则称$P$是$f(X)$在$X^*$处的**下降方向**.

定理 1　设$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$在$X \in \mathbf{R}^n$可微,如果存在向量$P \in \mathbf{R}^n$,使得$\nabla f(X)^{\mathrm{T}} P < 0$,则$P$为$f(X)$在$X$处的**下降方向**.

定理 2(一阶必要条件)　设f在点$X^* \in \mathbf{R}^n$可微,如果X^*是(1)的局部最优解,则必有$\nabla f(X^*) = 0$(称为**平稳点或驻点**).

定理 3(二阶必要条件)　设f在点$X^* \in \mathbf{R}^n$二次可微,如果X^*是(1)的局部最优解,则必有$\nabla f(X^*) = 0$且黑塞矩阵$H(X^*)$是半正定的.

定理 4(二阶充分条件)　设f在点$X^* \in \mathbf{R}^n$二次可微,如果$\nabla f(X^*) = 0$且$H(X^*)$正定,则X^*是问题(2)的**严格局部最优解**.

定理 5(充要条件)　设f是定义在n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$上的凸函数,$X^* \in \mathbf{R}^n$,则X^*为全局极值点的充要条件是$\nabla f(X^*) = 0$. 若f是严格凸函数,则全局极值点是唯一的.

例 1　考虑问题 $\min f(X) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$.

解　令$\nabla f(X) = 0$,解得驻点$X^1 = (0,0)^{\mathrm{T}}, X^2 = (6,9)^{\mathrm{T}}$. 又因

$$H(X) = \nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix}$$

且由于$H(X^1)$半正定,$H(X^2)$不是半正定,故X^2不是极小点.

例 2　考虑问题 $\min f(X) = 5x_1^2 - 6x_1 x_2 + 5x_2^2$.

解　因为$\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1 - 6x_2, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -6x_1 - 10x_2$,令$\nabla f(X) = 0$,解得驻点$X^* = (0,0)^{\mathrm{T}}$,又因为$H(X^*) = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$是正定的,所以$X^* = (0,0)^{\mathrm{T}}$是严格局部极小点.

5.2.2　搜索算法

1. 搜索算法概述

搜索算法是一种较常用的解无约束最优化问题的计算方法,掌握它对理解后面其他各种算法也是有益的.

考虑无约束最优化问题$\min\limits_{X \in \mathbf{R}^n} f(X)$. 如果$f$可微,则利用

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$

求其平稳点,然后再利用充分条件判别这些平稳点是否是极值点即可.

一般地,方程组(2)是一个有n个变量,n个方程的方程组,是非线性的且离散的,不一定可微,只有在十分特殊的情况下才能求得精确解,更何况实际问题中有些函数的解析表达式都很难写出,从而使一阶必要条件难以应用. 因此实际计算时一般采用一些比较切合实际、行之有效的

数值计算方法. 最常用的是**搜索算法(迭代算法)**.

搜索算法的基本思想是:首先给定目标函数 $f(X)$ 的极小点的一个初始估计点 X^0,然后按照一定的规则产生一个点列 $\{X^k\}$,这种规则通常就叫做**算法**,希望点列 $\{X^k\}$ 的极限 X^* 是 $f(X)$ 的一个极小点. 这样的点列怎样产生呢? 我们知道:X^{k+1} 与 X^k 之差是一个向量,它可以由方向和模来确定,即可设 X^{k+1} 为:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k S^k$$

其中向量 S^k 称为**搜索方向**,实数 λ_k 称为**步长**(图 5-1). 这样,在 λ_k 和 S^k 确定之后,由 X^k 就可以确定 X^{k+1}. **各种不同算法的差别,在于选择 S^k 和 λ^k 的方法(特别是 S^k)不同.** 搜索算法中用得最广泛的一类算法是在给定初始点之后,使得每迭代一次都使目标函数值有所下降,即 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$,这种迭代算法称为**下降算法**.

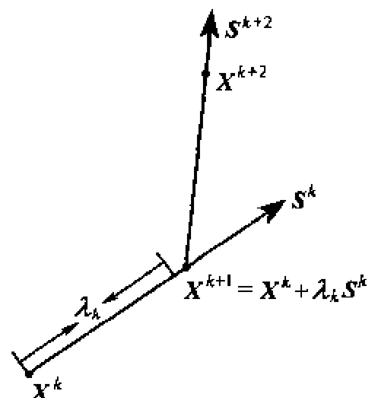


图 5-1 搜索算法示意图

我们希望得到的点列 $\{X^k\}$ 能收敛于问题的极小点 X^*,但由于计算机只能进行有限次迭代,故一般只能得到近似解,只要能满足事先给定的精度要求就停止迭代,这个迭代点就是**最优解**.

下降算法一般可分四步:

(1) 选定初始点 X^0(越靠近最优解越好),令 $k=0$.

(2) 假定已得到非最优解 X^k,则选定一个搜索方向 S^k,使得沿 S^k 方向,目标函数 $f(X)$ 的值可下降. 由定理 1 可知,S^k 满足:$\nabla f(X)^T S^k < 0$.

(3) 由 X^k 出发,以 S^k 为方向,作射线 $X^k + \lambda S^k$ ($\lambda \geqslant 0$),在此射线上选取步长 λ_k,使得 $f(X^k + \lambda_k S^k) < f(X^k)$,由此确定出一个点:$X^{k+1} = X^k + \lambda_k S^k$.

(4) 检验所得的新点 X^{k+1} 是否是最优解或近似解. 检验的方法可因算法的不同而不同,例如对预先给定的精度要求 $\varepsilon > 0$,若满足:

$$\| \nabla f(X^{k+1}) \| < \varepsilon, \text{或} \ \| f(X^{k+1}) - f(X^k) \| < \varepsilon, \text{或} \ \| X^{k+1} - X^k \| < \varepsilon$$

则可认为 X^{k+1} 是近似**最优解**,迭代停止;否则令 $k=k+1$ 返回(2),继续迭代.

关于方向的选择,一般考虑既要使它尽可能地指向极小点,又不至于花费太大的计算量,可根据具体算法来选择(后面讲算法时再讲).

关于步长的选择,有各种不同的选法,大致列举如下:

1) **简单算法**:$\lambda_k = 1$. 它计算简单,但不一定能保证下降性质.

2) **一维搜索算法**:取 λ_k 使 $f(X)$ 从 X^k 出发,沿 S^k 方向取极小值. 记为:

$$\begin{cases} \lambda_k : f(X^k + \lambda_k S^k) = \min f(X^k + \lambda S^k) \\ X^{k+1} = X^k + \lambda_k S^k \end{cases}$$

这是单变量 λ 的函数求极小值的问题,这样确定的步长称为**最优步长**.

3) **可接受点算法**:取 λ_k 使 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$ 就行,它保证了每次函数值下降,但并非最优. 实际计算时,这种取法往往能取得较好的数值效果.

实际计算中更为有效的是插值方法,如对 $f(X^k + \lambda S^k)$ 采用二次插值函数:$q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda$

$+c$，其中 a、b、c 可由 $\lambda=0$ 的函数值和导数值 $q(0)=f(X^k)$、$q'(0)=\nabla f(X^k)^{\mathrm{T}}S^k$，以及另一点的函数值 $q(\lambda)=f(X^k+\lambda S^k)$ 确定，而 λ 的最优值取使 $q(\lambda)$ 达到最小的 $\lambda_{\min}=-b/2a$. 如果采用三次插值方法，就需要增加计算另一点的导数值，还可以混合使用二次、三次插值方法.

总之，搜索方向确定后，步长就是决定算法好坏的重要因素.

定理 6（一维搜索的重要性质）　设目标函数 $f(X)$ 具有连续偏导数，且 X^{k+1} 是从 X^k 出发，沿 S^k 方向作一维搜索而得到的，则

$$\nabla f(X^{k+1})^{\mathrm{T}}S^k=0$$

即下一点梯度 $\nabla f(X^{k+1})^{\mathrm{T}}$ 必与此点的搜索方向 S^k 正交.

2. 一维搜索的直接法

无约束的一维最优化问题 $\min\limits_{x\in\mathbf{R}^1}f(x)$，除了可用驻点法、二分法、牛顿切线法和割线法外，还可用下列方法直接求解：

（1）"成功—失败"法

假定已取定了初始点 x^0 和初始步长 $\lambda>0$，向前搜索一次得新的点 $x^0+\lambda$. 比较其函数值，若 $f(x^0+\lambda)<f(x^0)$，则称**搜索成功**，下一步就以 $x^0+\lambda$ 为新的出发点，把步长增加为 $\beta_1\lambda$（例如取 $\beta_1=2$），继续向前搜索；否则，若 $f(x^0+\lambda)\geqslant f(x^0)$，则称**搜索失败**，下一步就退回到原出发点，即仍以 x^0 为出发点，把步长缩短为 $\beta_2\lambda$（如取 $\beta_2=-1/2$），向反方向搜索. 最后以给定允许误差 $\varepsilon>0$，当 $|\lambda|<\varepsilon$ 时，停止搜索.

（2）0.618 法（黄金分割法）

考虑问题 $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，假定 $f(x)$ 是搜索区间 $[a,b]$ 上的单峰函数，并记其极小点为 x^*. 容易证明，对于 $[a,b]$ 上的任意两点 $\lambda<\mu$，若 $f(\lambda)<f(\mu)$，则 $x^*\in[a,\mu]$；若 $f(\lambda)\geqslant f(\mu)$，则 $x^*\in[\lambda,b]$. 这就是说，计算并比较搜索区间内两点处的函数值，就能把搜索区间缩短，如此反复多次，就能越来越精确地估计出 x^* 的位置. 试验点的位置不同，效果也会不同. **分数法**和**0.618法**（黄金分割法）是两种最优的选点方法，统称为"优选法". 其中常用的0.618法是在分数法的基础上，经过简化而形成的一种一维搜索方法.

0.618 法的迭代步骤：

1）令初始区间左右端点为 $a_1=a$，$b_1=b$，给定允许误差 $\varepsilon>0$，令

$$\delta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$$

2）计算 $\begin{cases}\lambda_1=a_1+(1-\delta)(b_1-a_1)\\ \mu_1=a_1+\delta(b_1-a_1)\end{cases}$ 及 $f(\lambda_1)$，$f(\mu_1)$，令 $k=1$；

3）若 $b_k-a_k\leqslant\varepsilon$，则停止迭代，得 $x^*\in[a_k,b_k]$，否则，当 $f(\lambda_k)\geqslant f(\mu_k)$ 时，转(4)，当 $f(\lambda_k)<f(\mu_k)$ 时，转(5)；

4）令 $a_{k+1}=\lambda_k$，$b_{k+1}=b_k$，$\lambda_{k+1}=\mu_k$，$f(\lambda_{k+1})=f(\mu_k)$，计算 $\mu_{k+1}=a_{k+1}+\delta(b_{k+1}-a_{k+1})$ 及 $f(\mu_{k+1})$，转(6)；

5）令 $a_{k+1}=a_k$，$b_{k+1}=\mu_k$，$\mu_{k+1}=\lambda_k$，$f(\mu_{k+1})=f(\lambda_k)$，计算 $\lambda_{k+1}=a_{k+1}+(1-\delta)(b_{k+1}-a_{k+1})$ 及 $f(\lambda_{k+1})$，转(6)；

6）令 $k=k+1$，返回(3).

例 3 用 0.618 法求 $\min_{-3\leq x\leq 5} f(x)=x^2+2x$.

解 令 $a_1=-3, b_1=5$,取初始的两个试验点为

$$\lambda_1=a_1+0.382(b_1-a_1)=0.056$$

$$\mu_1=a_1+0.618(b_1-a_1)=1.944$$

计算得 $f(\lambda_1)=0.115<f(\mu_1)=7.667$,于是,取 $a_2=-3, b_2=1.994, \mu_2=\lambda_1=0.056$. 又 $\lambda_2=a_2+0.382(b_2-a_2)=-1.112$. 重复上述步骤,可得近似最优解,当 $k=9$ 时,得区间 $[-1.112,-0.936]$,所以其近似最优解为 $\bar{x}^*\approx -0.936$. 其迭代数据见下表:

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	-3.000	5.000	0.056	1.944	0.115	7.667
2	-3.000	1.944	-1.112	0.056	-0.987	0.115
3	-3.000	0.056	-1.832	-1.112	-0.308	-0.987
4	-1.832	0.056	-1.112	-0.664	-0.987	-0.887
5	-1.832	-0.664	-1.384	-1.112	-0.853	-0.987
6	-1.384	-0.664	-1.112	-0.936	-0.987	-0.996
7	-1.384	-0.936	-1.208	-1.112	-0.957	-0.987
8	-1.208	-0.936	-1.112	-1.032	-0.987	-0.999
9	-1.112	-0.936				

5.2.3 梯度法(最速下降法)

早在 1847 年,法国著名数学家柯西(Cauchy)就曾提出,从任一给定点 $X^0\in\mathbf{R}^n$ 出发,函数沿哪个方向下降最快的问题. 这个问题从理论上已经解决了,就是沿着 $f(X)$ 在该点的负梯度方向前进时,函数值下降最快. 这就是最速下降法的理论依据.

假定函数 $f(X)$ 具有一阶连续偏导数,为了求最优解 X^*,还假定已经迭代了 k 次,得第 k 次的迭代点 X^k,取搜索方向 $S^k=-\nabla f(X^k)$,为了使目标函数值在搜索方向上获得最快的下降,可沿 S^k 进行一维搜索,由此得到第 $k+1$ 次迭代点 X^{k+1}: $X^{k+1}=X^k-\lambda_k\nabla f(X^k)$,其中 λ_k 按最优步长选取,即 λ_k 满足:

$$f(X^k-\lambda_k\nabla f(X^k))=\min_{\lambda\geq 0} f(X^k-\lambda\nabla f(X^k))$$

这样就得到一个点列 $\{X^k\}$,其中 X^0 是任意给定的初始点. 当 $f(X)$ 满足一定条件时,$\{X^k\}$ 必收敛于 $f(X)$ 的极小点 X^*. 称这种迭代算法为**最速下降法**.

最速下降法的迭代步骤:

(1) 给定初始点 $X^0\in\mathbf{R}^n$,允许误差 $\varepsilon>0$,令 $k=0$;

(2) 计算 $\nabla f(X^k)$;

(3) 检验是否满足收敛性的判别准则: $\|\nabla f(X^k)\|\leq\varepsilon$,若满足,则停止迭代,得点 $X^*\approx X^k$,否则进行(4);

(4) 令 $S^k=-\nabla f(X^k)$,从 X^k 出发,沿 S^k 进行一维搜索,即求 λ,使得:

$$\min_{\lambda\geq 0} f(X^k+\lambda S^k)=f(X^k+\lambda_k S^k)$$

(5) 令 $X^{k+1}=X^k+\lambda_k S^k$，$k=k+1$. 返回(2).

最速下降法是一种最基本的算法，它在最优化方法中占有重要地位. 最速下降法的优点是工作量小，存储变量较少，初始点要求不高；缺点是收敛慢(依赖于 λ_k，在极小点附近容易出现梯度正交现象). 最速下降法适用于寻优过程的前期迭代或作为间插步骤. 当接近极值点时，宜选用别种收敛快的算法.

为了消除梯度正交现象，在迭代过程中可进行一些改进：

法一，先用梯度法求近似最优解，再用牛顿法等计算.

法二，为了消除梯度正交现象，把求得的 λ_k 用 $0.9\lambda_k$ 替代计算.

法三，平行切线法：在迭代过程中，经常把负梯度方向 $-\nabla f(X^k)$ 替换为 $S^k=X^k-X^{k-2}$，$k\geqslant 2$，即用 X^k-X^{k-2} 作为点 X^k 的搜索方向. 这种搜索方向的混合方法的收敛效果比最速下降法好.

如果第 k 次迭代是一个加速步，则最优步长 λ_k 是下面一维极小化问题的解：

$$\min_{\lambda\geqslant 0} f(X^k+\lambda(X^k-X^{k-2}))=f(X^k+\lambda_k(X^k-X^{k-2}))$$

平行切线法有多种类型，区别在于一个加速步之前，有多少迭代步使用最速下降方向，以及加速步的搜索方向除取 X^k-X^{k-2} 外，还可取 X^k-X^{k-3} 或 X^k-X^{k-n} 等等，最常用的平行切线法是由交错使用最速下降方向和加速步的方向构成的.

例 4 用最速下降法求问题 $\min f(X)=2x_1^2+x_2^2$ 的最优解.

解 取初始点 $X^0=(1,1)^T$，则 $\nabla f(X^k)=(4,2)^T$. 然后从 X^0 出发，沿方向 $S^0=-\nabla f(X^0)=(-4,-2)^T$ 进行一维搜索，即求解 $\min\varphi(\lambda)=f(X^0+\lambda S^0)$，而

$$X^0+\lambda S^0=\begin{bmatrix}1-4\lambda\\1-2\lambda\end{bmatrix}$$

故

$$\varphi(\lambda)=2(1-4\lambda)^2+(1-2\lambda)^2$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$，得 $\lambda_0=5/18$，于是

$$X^1=X^0+\lambda S^0=\left[-\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]^T$$

算出

$$\nabla f(X^1)=\left[-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right]^T$$

再从 X^1 出发，沿方向 $S^1=-\nabla f(X^1)=\left[\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right]^T$ 进行一维搜索，即求解 $\min\varphi(\lambda)=f(X^1+\lambda S^1)$，而 $X^1+\lambda S^1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1+4\lambda\\4-8\lambda\end{bmatrix}$，故

$$\varphi(\lambda)=\frac{2}{81}(-1+4\lambda)^2+\frac{16}{81}(1-2\lambda)^2$$

令 $\varphi'(\lambda)=0$，得 $\lambda_1=5/12$，于是

$$X^2=X^1+\lambda_1 S^1=\frac{2}{27}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

算出

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^2) = \left[\frac{8}{27},\frac{4}{27}\right]^{\mathrm{T}}$$

按上述过程可继续下去,直到满足收敛准则为止.该问题的最优解 $\boldsymbol{X}^* = (0,1)^{\mathrm{T}}, f(\boldsymbol{X}^*) = 0$.

5.2.4 牛顿法

考虑无约束问题 $\min\limits_{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{X})$,假定 $f(\boldsymbol{X})$ 具有二阶连续偏导数.

牛顿(Newton)法的基本思想是用一个二次函数去逼近目标函数 $f(\boldsymbol{X})$,然后精确地求出这个二次函数的极小点,并把这个极小点作为所求函数的极小点 $\boldsymbol{X}^*$ 的近似值.

假定 $\boldsymbol{X}^k$ 是 $f(\boldsymbol{X})$ 的极小点 $\boldsymbol{X}^*$ 的第 k 次近似,将 $f(\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X}^k$ 点作二阶泰勒展开,略去高于二阶的项,得

$$f(\boldsymbol{X}) \approx \phi(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X}^k) + \nabla f(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^k) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^k)$$

由于 $\phi(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的二次函数,可令 $\nabla\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ 求得 $\phi(\boldsymbol{X})$ 的极小点,由上式有

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^k) + \nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^k) = 0$$

若黑塞矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)$ 可逆,则上式解出的 $\boldsymbol{X}$ 就是二次函数 $\phi(\boldsymbol{X})$ 的极小值点.我们就以此作为 $f(\boldsymbol{X})$ 的极小点 $\boldsymbol{X}^*$ 的第 $k+1$ 次近似,记作 $\boldsymbol{X}^{k+1}$,即得:

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k - [\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)]^{-1}\nabla f(\boldsymbol{X}^k) \quad (\text{牛顿迭代公式})$$

$$\boldsymbol{S}^k = -[\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)]^{-1}\nabla f(\boldsymbol{X}^k) \quad (\text{牛顿方向})$$

牛顿法的迭代步骤:

(1) 选定初始点 $\boldsymbol{X}^0 \in \mathbf{R}^n$,给定允许误差 $\varepsilon > 0$,令 $k = 0$;

(2) 求 $\nabla f(\boldsymbol{X}^k)$,$[\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)]^{-1}$,若 $\|\nabla f(\boldsymbol{X}^k)\| < \varepsilon$,则停止迭代,$\boldsymbol{X}^* \approx \boldsymbol{X}^k$,否则,转(3);

(3) 令 $\boldsymbol{S}^k = -[\nabla^2 f(\boldsymbol{X}^k)]^{-1}\nabla f(\boldsymbol{X}^k)$;

(4) $\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k + \boldsymbol{S}^k$,$k = k+1$,转回(2).

如果 $f(\boldsymbol{X})$ 是对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次函数,则用牛顿法经过**一次迭代**就可达到最优点;如 $f(\boldsymbol{X})$ 不是二次函数,则牛顿法不能一步达到极值点.但由于这种函数在极值点附近和二次函数很近似,因此牛顿法的收敛速度还是很快的.牛顿法的收敛速度虽然较快,但要求黑塞矩阵可逆,要计算二阶导数和逆矩阵,就加大了计算机计算量和存储量.

如果初始点距极值点较远,由于用二次函数去近似 $f(\boldsymbol{X})$ 总有误差,$\boldsymbol{X}^{k+1}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的极值点也会有偏差,且 $\boldsymbol{X}^{k+1}$ 不一定是牛顿方向上的最优点,这就可能出现后继点的函数值大于前一点的函数值的现象,因而牛顿法可能收敛于极大点或鞍点(非极值点),也可能不收敛.基于这些原因,对古典的牛顿法要进行修改,修改的方法是由 $\boldsymbol{X}^k$ 求 $\boldsymbol{X}^{k+1}$ 时,沿着 $\boldsymbol{X}^k$ 处的牛顿方向 $\boldsymbol{S}^k$ 进行一维搜索,将这条直线上的最优点作为 $\boldsymbol{X}^{k+1}$,这样就会避免收敛于极大点或鞍点.这种方法通常称为**阻尼牛顿法(广义牛顿法)**.其迭代步骤与牛顿法基本一样,只是在第 4 步改为:

(4)' 从 $\boldsymbol{X}^k$ 出发,沿 $\boldsymbol{S}^k$ 进行一维搜索:

$$\min_{\lambda\geq 0} f(\boldsymbol{X}^k + \lambda\boldsymbol{S}^k) = f(\boldsymbol{X}^k + \lambda_k\boldsymbol{S}^k)$$

再令 $\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k + \lambda_k\boldsymbol{S}^k$,$k = k+1$,转回(2).

例 5　用牛顿法求下面函数的极小值.

$$f(X)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$$

取初值为 $X^0=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)^T$.

解　将 $f(X)$ 写成 $f(X)=\frac{1}{2}X^TAX, X\in\mathbf{R}^3$ 的形式,其中,A,A^{-1} 为

$$A=\begin{bmatrix}6&-2&-2\\-2&6&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1/4&1/8&1/8\\1/8&1/4&1/8\\1/8&1/8&1/4\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X^0)=AX^0=\begin{bmatrix}6&-2&-2\\-2&6&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\2\\1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$$

则极小点为

$$X^*=X^0-A^{-1}\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}1/2\\2\\1/2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4&1/8&1/8\\1/8&1/4&1/8\\1/8&1/8&1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

5.2.5　拟牛顿法

牛顿法中黑塞矩阵 $\nabla^2f(X^k)$ 不仅计算复杂,而且会出现病态、不正定等情况. 为克服这些缺点,同时保持较快收敛的优点,利用第 k 和第 $k+1$ 步得到的 $X^k,X^{k+1},\nabla f(X^k)$ 和 $\nabla f(X^{k+1})$,构造一个正定矩阵 G^{k+1} 近似代替 $\nabla^2f(X^k)$,或 H^{k+1} 近似代替 $[\nabla^2f(X^k)]^{-1}$,将牛顿方向改为

$$G^{k+1}S^{k+1}=-\nabla f(X^{k+1}),S^{k+1}=-H^{k+1}\nabla f(X^{k+1})\tag{3}$$

从而得到下降方向.

为了利用 $X^k,X^{k+1},\nabla f(X^k),\nabla f(X^{k+1})$ 构造 G^{k+1},H^{k+1},记:

$$\Delta X^k=X^{k+1}-X^k,\quad \Delta f^k=\nabla f(X^{k+1})-\nabla f(X^k)\tag{4}$$

因为 $\nabla^2f(X^k)\Delta X^k\approx\Delta f^k$(为什么?),要用 G^{k+1} 代替 $\nabla^2f(X^k)$,或 H^{k+1} 代替 $[\nabla^2f(X^k)]^{-1}$,就必须有

$$G^{k+1}\Delta X^k=\Delta f^k,\quad \Delta X^k=H^{k+1}\Delta f^k\tag{5}$$

称为**拟牛顿条件**. 根据这个条件,通常采用迭代法计算 G^{k+1},H^{k+1},称为**拟牛顿法**. 两个著名的迭代公式为:

BFGS(Boryden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)公式:

$$G^{k+1}=G^k+\frac{\Delta f^k(\Delta f^k)^T}{(\Delta f^k)^T\Delta x^k}-\frac{G^k\Delta x^k(\Delta x^k)^TG^k}{(\Delta x^k)^TG^k\Delta x^k}\tag{6}$$

$$H^{k+1}=H^k+\left(1+\frac{(\Delta f^k)^TH^k\Delta f^k}{(\Delta f^k)^T\Delta x^k}\right)\frac{\Delta x^k(\Delta x^k)^T}{(\Delta f^k)^T\Delta x^k}-\frac{\Delta x^k(\Delta f^k)^TH^k-H^k\Delta f^k(\Delta x^k)^T}{(\Delta f^k)^T\Delta x^k}\tag{7}$$

DEP(Davidon-Fletcher-Powell)公式:

$$G^{k+1}=G^k+\left(1+\frac{(\Delta X^k)^{\mathrm T}G^k\Delta X^k}{(\Delta X^k)^{\mathrm T}\Delta f^k}\right)\frac{\Delta f^k(\Delta f^k)^{\mathrm T}}{(\Delta f^k)^{\mathrm T}\Delta X^k}-\frac{\Delta f^k(\Delta X^k)^{\mathrm T}G^k-G^k\Delta X^k(\Delta f^k)^{\mathrm T}}{(\Delta X^k)^{\mathrm T}\Delta f^k} \tag{8}$$

$$H^{k+1}=H^k+\frac{\Delta X^k(\Delta X^k)^{\mathrm T}}{(\Delta f^k)^{\mathrm T}\Delta X^k}-\frac{H^k\Delta f^k(\Delta f^k)^{\mathrm T}H^k}{(\Delta f^k)^{\mathrm T}H^k\Delta f^k} \tag{9}$$

比较这两个公式可以发现,(6)和(7)中将 ΔX^k 和 Δf^k 互换就分别得到(9)和(8). 称它们为对偶公式,BFGS 和 DEP 互为对偶方法.

计算时可置 $H^1=I$(单位矩阵),对于给出的 X^1,利用(3)、(4)、(6)—(9)式递推.

可以证明,只要 $(\Delta f^k)^{\mathrm T}\Delta X^k>0$,如此构造的 H^k 就是正定对称的,并且迭代是 2 阶收敛的.

5.3 用 MATLAB 优化工具箱解无约束最优化

5.3.1 MATLAB 优化工具箱简介

在 3.5 节,我们介绍了用 MATLAB 工具箱中的函数 linprog 解线性规划的方法. MATLAB 优化工具箱主要提供了一般无约束优化与约束优化的求解问题,同时还提供了非线性方程(组)的求解及最小二乘(数据拟合)问题的解决. 这里,我们从总体上介绍 MATLAB 优化工具箱.

1. MATLAB 优化工具箱的主要函数

MATLAB 求解优化问题的主要函数见表 5-1.

表 5-1

类　型	模　型	基本函数名
一元函数极小	min $F(x)$ s. t. $x_1<x<x_2$	x = fminbnd('F',x_1,x_2)
无约束极小	min $F(X)$	X = fminunc('F',X0) X = fminsearch('F',X0)
线性规划	min $c^{\mathrm T}X$ s. t. $AX\leqslant b$	X = linprog(c,A,b)
二次规划	min $\frac{1}{2}x^{\mathrm T}Hx+c^{\mathrm T}x$ s. t. $Ax\leqslant b$	X = quadprog(H,c,A,b)
约束极小 (非线性规划)	min $F(X)$ s. t. $G(X)\leqslant 0$	X = fmincon('FG',X0)
达到目标问题	min r s. t. $F(x)-wr\leqslant goal$	X = fgoalattain('F',x,goal,w)
极小极大问题	$\min\limits_{x}\max\limits_{\{F_i(x)\}}\{F_i(x)\}$ s. t. $G(x)\leqslant 0$	X = fminimax('FG',x0)

注:[1] fminbnd 对应 MATLAB 5.3 以前的 fmin.

[2] fminunc 对应 MATLAB 5.3 的 fminu;

[3] fminsearch 对应 MATLAB 5.3 的 fmins;

[4] quadprog 对应 MATLAB 5.3 的 qp;

[5] fmincon 对应 MATLAB 5.3 的 constr;

[6] fgoalattain 对应 MATLAB 5.3 的 attgoal.

2. 优化函数的输入变量

使用表 5－1 中的优化函数或优化工具箱中其他优化函数时，输入变量见表 5－2.

表 5－2

变量	描　　述	调用函数
f	线性规划的目标函数 fX 或二次规划的目标函数 $X^{T}HX+fX$ 中线性项的系数向量	linprog,quadprog
fun	非线性优化的目标函数 fun 必须为行命令对象或 M 文件、嵌入函数、或 MEX 文件的名称	fminbnd,fminsearch,fminunc, fmincon,lsqcurvefit,lsqnonlin, fgoalattain,fminimax
H	二次规划的目标函数 $X^{T}HX+fX$ 中二次项的系数矩阵	quadprog
A,b	A 矩阵和 b 向量分别为线性不等式约束：$AX\leq b$ 中的系数矩阵和右端向量	linprog,quadprog,fgoalattain, fmincon, fminimax
Aeq,beq	Aeq 矩阵和 beq 向量分别为线性等式约束：$Aeq\cdot X=beq$ 中的系数矩阵和右端向量	linprog,quadprog,fgoalattain, fmincon, fminimax
vlb,vub	X 的下限和上限向量:vlb≤X≤vub	linprog,quadprog,fgoalattain, fmincon,fminimax,lsqcurvefit, lsqnonlin
x0	迭代初始点坐标	除 fminbnd 外所有优化函数
x1,x2	函数最小化的区间	fminbnd
options	优化选项参数结构,定义用于优化函数的参数	所有优化函数

3. 优化函数的输出变量

优化函数的最常用的输出变量见表 5－3.

表 5－3

变量	描　　述	调用函数
x	由优化函数求得的值.若"exitflag＞0,"则 x 为解;否则,x 不是最终解,它只是迭代制止时优化过程的值	所有优化函数

续表

变量	描　　述	调用函数
fval	解 x 处的目标函数值	linprog,quadprog,fgoalattain,fmincon,fminimax,lsqcurvefit,lsqnonlin, fminbnd
exitflag	描述退出条件： • exitflag >0,表示目标函数收敛于解 x 处 • exitflag =0,表示已达到函数评价或迭代的最大次数 • exitflag <0,表示目标函数不收敛	
output	包含优化结果信息的输出结构： • Iterations:迭代次数 • Algorithm:所采用的算法 • FuncCount:函数评价次数	所有优化函数

4. 控制参数 options 的设置

在大多数优化程序(包括无约束优化、非线性规划、最小二乘拟合等)中有一个控制参数 options,它包含了在优化程序中要用到的参数,供使用者在计算时控制精度要求、输出形式、算法选择、迭代次数等.

Options 中常用的几个参数的名称、含义、取值如下：

(1) Display：显示水平.取值为'off'时,不显示输出；取值为'iter'时,显示每次迭代的信息;取值为'final'时,显示最终结果.默认值为'final'.

(2) MaxFunEvals：允许进行函数评价的最大次数,取值为正整数.

(3) MaxIter：允许进行迭代的最大次数,取值为正整数.

控制参数 options 可以通过函数 optimset 创建或修改.命令的格式如下：

(1) options = optimset('optimfun')

创建一个含有所有参数名,并与优化函数 optimfun 相关的默认值的选项结构 options.

(2) options = optimset('param1',value1,'param2',value2,...)

创建一个名称为 options 的优化选项参数,其中指定的参数具有指定值,所有未指定的参数取默认值.

(3) options = optimset(oldops,'param1',value1,'param2',value2,...)

创建名称为 oldops 的参数的拷贝,用指定的参数值修改 oldops 中相应的参数.

例如,opts = optimset('Display','iter','TolFun',1e-8)

该语句创建一个称为 opts 的优化选项结构,其中显示参数设为'iter',TolFun 参数设为 1e-8.

Options 设置的更多实例见本节例4.

5.3.2 用 MATLAB 解无约束优化问题

无约束极小化问题的标准型为：

$$\min F(X)$$

其中 X 为 n 维变元向量.

1. 一元函数无约束优化问题

解一元函数的无约束优化问题:

$$\min f(x) \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

使用的函数是 fminbnd,其常用格式如下:

(1) x = fminbnd (fun,x_1,x_2)

(2) x = fminbnd(fun,x_1,x_2,options)

(3) [x,fval] = fminbnd(…)

(4) [x,fval,exitflag] = fminbnd(…)

(5) [x,fval,exitflag,output] = fminbnd(…)

其中(3)、(4)、(5)的等式右边可选用(1)或(2)的等式右边.

函数 fminbnd 的算法基于黄金分割法和二次插值法,它要求目标函数必须是连续函数,并可能只给出局部最优解.

例 1 求 $f=2e^{-x}\sin x$ 在 $0<x<8$ 中的最小值与最大值.

建立 M 文件 wliti1.m 如下:

```
f ='2 * exp( -x) .* sin(x)';
fplot(f,[0,8]);              % 作图语句
[xmin,ymin] = fminbnd(f, 0,8)
f1 ='-2 * exp( -x) .* sin(x)';
[xmax,ymax] = fminbnd(f1,0,8)
```

运行结果:

```
xmin =3.9270
ymin = -0.0279
xmax =0.7854
ymax = 0.6448
```

例 2 对边长为 3 m 的正方形铁板,在四个角剪去相等的正方形以制成方形无盖水槽,问如何剪使水槽的容积最大?

设剪去的正方形的边长为 x,则水槽的容积为 $(3-2x)^2x$.

建立无约束优化模型为:$\min y = -(3-2x)^2x,\ 0<x<1.5$.

先编写 M 文件 fun0.m 如下:

```
function f = fun0(x)
f = -(3 -2 * x).^2 * x;
```

主程序为 wliti2.m:

```
[x,fval] = fminbnd('fun0',0,1.5);
xmax = x
fmax = -fval
```

运行结果:

xmax = 0.5000, fmax = 2.0000

即剪掉的正方形的边长为 0.5 m 时水槽的容积最大,最大容积为 2 m^3.

请通过例 1 和例 2 体会两种定义目标函数的不同方式.

2. 多元函数无约束优化问题

多元函数无约束极小化问题的标准型为:

$$\min F(X)$$

其中 X 为 n 维变元向量. 用 MATLAB 求解上述问题,可以使用 fminunc 函数或 fminsearch 函数.命令格式为:

(1) x = fminunc(fun,X0),或 x = fminsearch(fun,X0)

(2) x = fminunc(fun,X0,options),或 x = fminsearch(fun,X0,options)

(3) [x,fval] = fminunc(…),或[x,fval] = fminsearch(…)

(4) [x,fval,exitflag] = fminunc(…),或[x,fval,exitflag] = fminsearch

(5) [x,fval,exitflag,output] = fminunc(…),

或[x,fval,exitflag,output] = fminsearch(…)

说明:

- fminsearch 是用单纯形法寻优.fminunc 的算法见以下几点说明:

[1] fminunc 为无约束优化提供了大型优化和中型优化算法.由 options 中的参数 LargeScale 控制:

LargeScale = 'on'(默认值),使用大型算法;

LargeScale = 'off'(默认值),使用中型算法.

[2] fminunc 为中型优化算法的搜索方向提供了 4 种算法,由 options 中的参数 HessUpdate 控制:

HessUpdate = 'bfgs'(默认值),拟牛顿法的 BFGS 公式;

HessUpdate = 'dfp',拟牛顿法的 DFP 公式;

HessUpdate = 'steepdesc',最速下降法.

[3] fminunc 为中型优化算法的步长一维搜索提供了两种算法,由 options 中参数 LineSearchType 控制:

LineSearchType = 'quadcubic'(缺省值),混合的二次和三次多项式插值;

LineSearchType = 'cubicpoly',三次多项式插值.

- 使用 fminunc 和 fminsearch 可能会得到局部最优解.

例 3 $\min f(x) = (4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)e^{x_1}$

编写 M 文件 fun1.m:

```
function f = fun1(x)
f = exp(x(1)) * (4 * x(1)^2 + 2 * x(2)^2 + 4 * x(1) * x(2) + 2 * x(2) + 1);
```

输入 M 文件 w1iti2.m 如下:

```
x0 = [ -1,1];
x = fminunc('fun1',x0);
y = fun1(x)
```

或

```
x0 = [ -1,1];
[x,options] = fminunc('fun1',x0,options)    % 要求结果输出 x 和 options 参数.
y = options(8)
```

运行结果:

```
x = 0.5000    -1.0000
y = 1.3029e-10
```

例 4　Rosenbrock 函数 $f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ 的最优(极小)解为 $x^*=(1,1)^T$,极小值为 $f^*=0$. 试用不同算法(搜索方向和步长搜索)求数值最优解. 初值选为 $x_0=(-1.2,2)$.

为获得直观认识,先画出 Rosenbrock 函数的三维图形和等高线图.

画 Rosenbrock 函数的三维图形,M 文件 wliti31.m 如下:

```
[x,y] = meshgrid(-2:0.1:2, -1:0.1:3);
z = 100 * (y - x.^2).^2 + (1 - x).^2;
mesh(x,y,z)
```

画出三维图形如图 5-2.

画 Rosenbrock 函数的等高线图,M 文件 wliti32.m 如下:

```
contour(x,y,z,20)
drawnow                  % 画出当前图形
hold on
plot(-1.2,2,'o');
text(-1.2,2,'start point')
plot(1,1,'o')
text(1,1,'solution')
```

画出等高线图,如图 5-3.

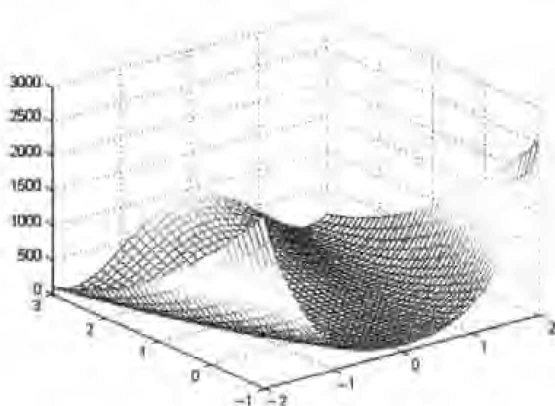


图 5-2　Rosenbrock 函数的三维图形

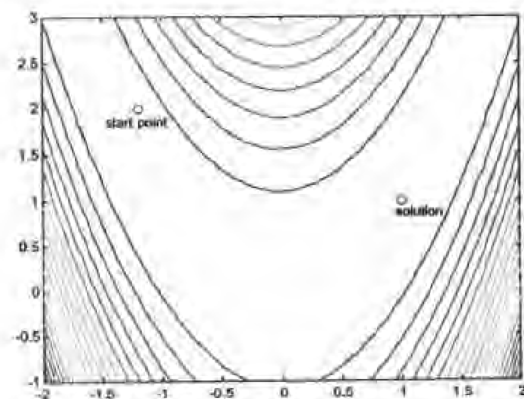


图 5-3　Rosenbrock 函数的等高线

可以看出，Rosenbrock 函数是绕过原点的弯曲形状(这种函数称香蕉函数)，从初始点到最优点有一狭长通道，不利于沿负梯度方向下降，是检验优化算法性能的有名函数.

(1) 用 fminsearch 函数

输入命令 wliti41.m:

```
f ='100 * (x(2) -x(1)^2)^2 +(1 -x(1))^2';
[x,fval,exitflag,output] = fminsearch(f,[ -1.2 2])
```

运行结果:

```
x =1.0000    1.0000
fval =1.9151e -010
exitflag =1
output =
        iterations:108
        funcCount:202
        algorithm:'Nelder -Mead simplex direct search'
```

(2) 用 fminunc 函数

用 3 种搜索方向(BFGS,DFP 和最速下降法)及 2 种步长搜索(混合二、三次插值和三次插值)计算.

建立 M 文件 fun2.m:

```
function f = fun2(x)
f =100 * (x(2) -x(1)^2)^2 +(1 -x(1))^2
```

主程序 wliti44.m 如下:

```
% fminunc 函数缺省选项
oldoptions =optimset('fminunc')
% 采用中型优化算法
options =optimset(oldoptions,'LargeScale','off')
% DFP 法、混合二、三次插值
options11 =optimset(options,'HessUpdate','dfp')
[x11,fval11,exitflag11,output11] = fminunc('fun2',[ -1.2 2],op-
tions11)
pause
% DFP 法、三次插值
options12 =optimset(options,'HessUpdate','dfp','LineSearchType','cubicpoly')
[x12,fval12,exitflag12,output12] = fminunc('fun2',[ -1.2 2],op-
tions12)
pause
% BFGS 法,混合二、三次插值
options21 =optimset(options,'HessUpdate','bfgs')
[x21,fval21,exitflag21,output21] = fminunc('fun2',[ -1.2 2],op-
```

```
tions21)
pause
% BFGS 法,三次插值
options22 =optimset(options,'HessUpdate','bfgs','LineSearchType','cubicpoly')
[x22,fval22,exitflag22,output22] = fminunc('fun2',[-1.2 2],op-
tions22)
pause
% 最速下降法、混合二、三次插值
options31 =optimset(options,'HessUpdate','steepdesc')
[x31,fval31,exitflag31,output31] = fminunc('fun2',[-1.2 2],op-
tions31)
% 最速下降法、设定最大迭代次数 8000
options32 = optimset(options,'HessUpdate','steepdesc','MaxIter',
            8000,'MaxFunEvals',8000)
[x32,fval32,exitflag32,output32] = fminunc('fun2',[-1.2 2],op-
tions32)
% 最速下降法、混合二、三次插值、设定最大迭代次数 9000
options33 = optimset(options,'HessUpdate','steepdesc','MaxIter',
            9000,'MaxFunEvals',9000)
[x33,fval33,exitflag33,output33] = fminunc('fun2',[-1.2 2],op-
tions33)
```

运行结果见表 5－4.

表 5－4　Rosenbrock 函数不同算法的计算结果

搜索方向	步长搜索	最优解	最优值	迭代次数
BFGS	混合二、三次插值	(0.999 6, 0.999 2)	$2.310\,9\times10^{-7}$	155
	三次插值	(1.000 1, 1.000 2)	$2.394\,3\times10^{-8}$	132
DFP	混合二、三次插值	(0.999 5, 0.999 0)	$2.622\,3\times10^{-7}$	151
	三次插值	(0.899 4, 0.799 5)	0.019 2	204
最速下降法	混合二、三次插值	(－1.163 4, 1.361 0)	4.685 9	204
		(0.944 6, 0.892 0)	0.003 1	8 002
		(0.995 9, 0.991 6)	$1.854\,3\times10^{-5}$	9 002
单纯形法		(1.000 0, 1.000 0)	$1.915\,1\times10^{-10}$	202

可以看出,最速下降法的结果最差.因为最速下降法特别不适合于从一狭长通道到达最优解的情况.

例 5　产销量的最佳安排问题:某厂生产一种产品有甲、乙两个牌号,讨论在产销平衡的情

况下如何确定各自的产量,使总利润最大. 所谓产销平衡指工厂的产量等于市场上的销量.

设 $z(x_1,x_2)$ 表示总利润;p_1,q_1,x_1 分别表示甲的价格、成本、销量;p_2,q_2,x_2 分别表示乙的价格、成本、销量.

(1) 利润既取决于销量和价格,也依赖于产量和成本. 按照市场规律,甲的价格 p_1 会随其销量 x_1 的增长而降低,同时乙的销量 x_2 的增长也会使甲的价格有稍微的下降,可以简单地假设价格与销量成线性关系,即

$$p_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, b_1, a_{11}, a_{12} > 0, \text{且 } a_{11} > a_{12}$$

同理

$$p_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2, b_2, a_{21}, a_{22} > 0, \text{且 } a_{22} > a_{21}$$

(2) 甲的成本随其产量的增长而降低,且有一个渐近值,可以假设成本与产量成负指数关系,即

$$q_1 = r_1 e^{-\lambda_1 x_1} + c_1, \quad r_1, \lambda_1, c_1 > 0$$

同理

$$q_2 = r_2 e^{-\lambda_2 x_2} + c_2, \quad r_2, \lambda_2, c_2 > 0$$

$a_{ij}, b_i, \lambda_i, c_i, r_i (i, j = 1, 2)$ 是待定系数.

(3) 总利润为:$z(x_1,x_2) = (p_1 - q_1)x_1 + (p_2 - q_2)x_2$. 若根据大量的统计数据,求出待定系数如下:

$$b_1 = 100, \quad b_2 = 280, \quad r_1 = 30, \quad r_2 = 100$$
$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0.1, \quad a_{21} = 0.2, \quad a_{22} = 2$$
$$\lambda_1 = 0.015, \quad \lambda_2 = 0.02, \quad c_1 = 20, \quad c_2 = 30$$

则问题转化为无约束优化问题:求甲,乙两个牌号的产量 x_1, x_2,使总利润 z 最大. 即,为求解该模型,先忽略成本,并令 $a_{12} = 0, a_{21} = 0$,问题转化为求

$$z_1 = (b_1 - a_{11}x_1)x_1 + (b_2 - a_{22}x_2)x_2$$

的极值. 显然其解为 $x_1 = b_1/2a_{11} = 50, x_2 = b_2/2a_{22} = 70$,我们把它作为原问题的初始值.

建立 M 文件 fun.m:

```
function f = fun(x)
y1 = ((100 - x(1) - 0.1 * x(2)) - (30 * exp( - 0.015 * x(1)) + 20)) * x(1);
y2 = ((280 - 0.2 * x(1) - 2 * x(2)) - (100 * exp( - 0.02 * x(2)) + 30)) * x(2);
f = - y1 - y2;
```

主程序 wliti5.m 如下:

```
x0 = [50,70];
x = fminunc('fun',x0),
z = fun(x)
```

计算结果:

```
x = 23.9025, 62.4977,   f = 6.4135e + 003
```

即甲的产量为 23.902 5,乙的产量为 62.497 7,最大利润为 6 413.5 .

5.4 习 题

1. 求下列函数的梯度和黑塞矩阵：

(1) $f(\boldsymbol{X})=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3$;

(2) $f(\boldsymbol{X})=x_1^2+\ln(x_1x_2)$.

2. 考虑无约束问题

$$\min \frac{x_1+x_2}{3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2}.$$

求满足极值必要条件的点，并用充分条件验证这些点是极小点.

3. 试用最速下降法求解

$$\min(x_1^2+2x_2^2)$$

设初始点取为 $\boldsymbol{X}^0=(4,4)^{\mathrm{T}}$，迭代三次，并验证相邻两次迭代的搜索方向是相互垂直的.

4. 用牛顿法求函数 $f(\boldsymbol{X})=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2-2x_1+18x_2$ 的极小点（初始点可任意选取）.

5. 用 DFP 方法求 $f(\boldsymbol{X})=e^{x_1}(3x_1+x_2+5x_1x_2+x_1^2+3x_2^2)$ 的极小点.

第 6 章　非线性规划

目标函数或约束条件中至少有一个是非线性函数的最优化问题叫做**非线性规划问题**.

非线性规划问题的数学模型一般可写为:

$$\min f(X)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(X) \geqslant 0 & i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(X) = 0 & j = 1,2,\cdots,l \end{cases} \tag{1}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$,表示 X 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的向量或点,f,g_i,h_j 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,简记

$$f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1,\quad g_i:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1,\quad h_j:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1.$$

如果采用向量表示法,则问题(1)可以写成:

$$\min f(X)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{g}(X) \geqslant 0 \\ \boldsymbol{h}(X) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{g}(X) = (g_1(X),g_2(X),\cdots,g_m(X))^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{h}(X) = (h_1(X),h_2(X),\cdots,h_l(X))^{\mathrm T}$$

即 $\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}$ 分别是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上而取值于 $\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^l$ 的向量函数,简记为 $\boldsymbol{g}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m,\boldsymbol{h}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^l$.

至于求目标函数的最大值或约束条件为小于等于零的情况,都可通过取其相反数,化为上述一般形式.

6.1　非线性规划的数学模型

建立优化问题的数学模型,首先要确定问题的决策变量,用 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 表示n 维向量,然后构造模型的目标函数 $f(X)$ 和允许 X 取值的范围 $X\in D$,其中 D 称为可行域,常用一组不等式(也可以有等式)$g_i(X)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$来界定,称为约束条件. 一般地,这类模型可表示为:

$$\min_{X\in D}\ f(X)$$
$$\text{s.t.}\ g_i(X)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m$$

例 1(约束回归)　某大学希望为它的毕业生安排工作位置. 为简单起见,假设每个毕业生接受政府部门、工业界或科学院中的一个位置. 令 N_j 为第 j 年毕业的人数,$j=1,2,\cdots,n$,并令 G_j、I_j 和 $A_j(G_j+I_j+A_j=N_j)$分别为第 j 年进入政府、工业界或科学院的人数.

考虑的一种方法是假设给出每年学生人数参加各部门的比例. 如果比例分别为 λ_i,则在第 j 年可估计出参加各种工作的人数为:

$$\hat{G}_j = \lambda_1 N_j, \quad \hat{I}_j = \lambda_2 N_j, \quad \hat{A}_j = \lambda_3 N_j$$

为了有根据地衡量这个模型的可靠性，必须了解进入这三个工作部门的实际人数 G_j, I_j 和 A_j 与预计的数字 $\hat{G}_j, \hat{I}_j, \hat{A}_j$ 之间的差别. 按最小二乘法估计，为使

$$\sum_{j=1}^{n} [(G_j - \hat{G}_j)^2 + (I_j - \hat{I}_j)^2 + (A_j - \hat{A}_j)^2]$$

为最小，同时满足所有毕业生为这些行业所雇佣的约束条件. 根据进入各行业的比例，模型可表示为：

$$\min \sum_{j=1}^{n} [(G_j - \lambda_1 N_j)^2 + (I_j - \lambda_2 N_j)^2 + (A_j - \lambda_3 N_j)^2]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 2（投资问题） 假设某公司在下一个计划期内可用于投资的总资本为 b 万元，可供选择的投资项目共有 n 个，分别记为 $1,2,\cdots,n$. 已知对第 j 个项目的投资总额为 a_j 万元，而收益总额为 c_j 万元. 问如何进行投资，才能使利润率（即单位投资可获得的收益）最高？

解 设投资决策变量

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{若对第 } j \text{ 个项目投资} \\ 0, & \text{若不对第 } j \text{ 个项目投资} \end{cases} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则该问题可归结为求变量 $x_j (j=1,2,\cdots,n)$，使

$$\max f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \ (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

6.2 非线性规划问题的解

一般说来，求解非线性规划问题要比求解线性规划问题困难得多. 非线性规划不像线性规划那样有统一的数学模型，又有单纯形法这一通用解法. 非线性规划目前还没有适合于各种问题的一般算法，各个算法都有特定的适用范围，带有一定的局限性，它是需要人们更深入地进行研究的领域. 由前面知识可知，线性规划问题如果有最优解，其最优解必然能在可行域的顶点（或边界）上取得；而非线性规划问题的最优解却可能在可行域的任一点上取得. 因此，线性规划中单纯形法求出的是全局最优解，而一般非线性规划方法求出的只是局部最优解.

绝大多数实际问题都是有约束问题. 对约束极小化问题来说，除了要使目标函数在每次迭代时有所下降外，还要时刻注意解的可行性问题（某些算法除外），这就给寻优工作带来很大困难. 求解带约束条件的非线性规划问题的常见方法是：将约束问题化为无约束问题，将非线性规划问

题化为线性规划问题，以及将复杂问题化为较简单的问题的其他方法.

6.2.1 基本概念

与线性规划问题一样，把满足本章前言的问题(1)中条件的解 $X(\in\mathbf{R}^n)$ 称为**可行解(或可行点)**，所有可行解的集合称为**可行集(或可行域)**. 记为 D. 即

$$D=\{X \mid g_i(X)\geqslant 0, h_j(X)=0, X\in\mathbf{R}^n\}$$

问题(1)可简记为 $\min\limits_{X\in D} f(X)$.

与线性规划问题最优解概念不同的是，非线性规划问题的最优解可分为局部最优解和全局最优解两种：

定义 1 对于问题(1)，设 $X^*\in D$，若存在 $\delta>0$，使得对一切 $X\in D$，且 $\|X-X^*\|<\delta$，都有 $f(X^*)\leqslant f(X)$，则称 X^* 是 $f(X)$ 在 D 上的**局部极小值点(局部最优解)**. 特别地，当 $X\neq X^*$ 时，若 $f(X^*)<f(X)$，则称 X^* 是 $f(X)$ 在 D 上的**严格局部极小值点(严格局部最优解)**.

定义 2 对于问题(1)，设 $X^*\in D$，若对任意的 $X\in D$，都有 $f(X^*)\leqslant f(X)$，则称 X^* 是 $f(X)$ 在 D 上的**全局极小值点(全局最优解)**. 特别地，当 $X\neq X^*$ 时，若 $f(X^*)<f(X)$，则称 X^* 是 $f(X)$ 在 D 上的**严格全局极小值点(严格全局最优解)**.

从定义可以看出，X^* 是局部极小值点，是指以 X^* 为中心的一个邻域内，$f(X)$ 在点 X^* 处取得最小值；X^* 是全局极小值点，是指在可行域 D 内，$f(X)$ 在点 X^* 处取得最小值. 全局极小值点可能在某个局部极小值点处取得，也可能在可行域 D 的边界取得.

6.2.2 有约束的非线性规划问题的最优性条件

1. 等式约束问题的最优性条件

考虑问题

$$\begin{aligned}&\min\ f(X)\\&\text{s.t.}\ h_j(X)=0\quad j=1,2,\cdots,l\end{aligned}\tag{1}$$

定理 1(一阶必要条件，拉格朗日(Lagrange)定理) 设 $f, h_j(j=1,2,\cdots,l)$ 在可行点 X^* 的某个邻域 $N(X^*,\varepsilon)$ 可微，向量组 $\nabla h_j(X^*)$ 线性无关. 如果 X^* 是问题(1)的局部最优解，则存在实数 λ_j^*，使得

$$\nabla f(X^*)-\sum_{j=1}^{l}\lambda_j^*\nabla h_j(X^*)=0\ (\text{即}\ \nabla_X L=0;\text{而}\ \nabla_\lambda L=0\ \text{即}\ h_j(X^*)=0)$$

其中，$L(X,\lambda)=f(X)-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm T}\boldsymbol{h}(X)$ 称为**拉格朗日函数**，$\boldsymbol{\lambda}$ 称为**拉格朗日乘子向量**.

拉格朗日定理的意义在于能将问题(1)的求解转化为无约束问题的求解.

定理 2(二阶充分条件) 设 $X^*\in\mathbf{R}^n$ 是问题(1)的可行解，$f, h_j(j=1,2,\cdots,l)$ 在 X^* 二次可微. 如果存在向量 $\boldsymbol{\lambda}^*\in\mathbf{R}^l$，使 $\nabla L(X,\boldsymbol{\lambda}^*)=0$，且 $L(X,\boldsymbol{\lambda})$ 的黑塞矩阵 $\boldsymbol{H}(X^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 正定，则 X^* 是问题(1)的局部最优解.

2. 不等式约束问题的最优性条件

考虑问题

$$\begin{aligned}&\min\ f(X)\\&\text{s.t.}\ g_i(X)\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{2}$$

定理3（库恩－塔克(Kuhn-Tucker)必要条件）　设 X^* 是问题(2)的可行解，$f, g_i(i\in I)$ 在 X^* 可微．$g_i(i\notin I)$ 在 X^* 连续，再假设 $\nabla g_i(X^*)(i\in I)$ 线性无关，如果 X^* 是问题(2)的局部最优解，则存在 $\mu_i(i\in I)$，使得

$$\begin{cases}\nabla f(X^*) - \sum\limits_{i\in I}\mu_i\nabla g_i(X^*) = 0\\ \mu_i\geqslant 0,\ \forall i\in I\end{cases}\qquad (\text{K-T 条件}, X^* \text{为 K-T 点})$$

如果再假设 $g_i(i\notin I)$ 在 X^* 也可微，则上述 K-T 条件可改为：

$$\begin{cases}\nabla f(X^*) - \sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(X^*) = 0\\ \mu_i g_i(X^*) = 0,\ i = 1,\cdots,m\\ \mu_i\geqslant 0,\ i = 1,\cdots,m\end{cases}$$

其中 $I=\{i\mid g_i(X)=0, X\in D\}$，表示在可行点 X 起约束作用的指标集.

定理4（K-T 充分条件）　设 X^* 是问题(2)的可行解，$f, -g_i(i=1,\cdots,m)$ 是凸函数，且在 X^* 可微，又点 X^* 满足 K-T 条件，则 X^* 是全局最优解.

例1　求解最优化问题

$$\min\ \{(x_1-1)^2 + x_2\}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}g_1(X) = -x_1 - x_2 + 2\geqslant 0\\ g_2(X) = x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　因为 $\nabla f(X)=(2(x_1-1),1)^{\mathrm T}$，$\nabla g_1(X)=(-1,-1)^{\mathrm T}$，$\nabla g_2(X)=(0,1)^{\mathrm T}$，故

$$\text{K-T 条件为：}\begin{cases}\begin{bmatrix}2(x_1-1)\\ 1\end{bmatrix} - \mu_1\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix} - \mu_2\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ \mu_1(x_1+x_2-2) = 0\\ \mu_2 x_2 = 0\\ \mu_1,\mu_2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\mu_1 + 2x_1 - 2 = 0\\ \mu_1 - \mu_2 + 1 = 0\\ \mu_1(x_1+x_2-2) = 0\\ \mu_2 x_2 = 0\\ \mu_1,\mu_2\geqslant 0\end{cases}$$

这是非线性方程组，但不难求解得 $\mu_1=0, \mu_2=1, x_1=1, x_2=0$. 即 $X^*=(1,0)^{\mathrm T}$ 满足 K-T 条件.

又因为 $f(X), g_1(X), g_2(X)$ 为凸函数，且在 X^* 处可微，依定理4知 $X^*=(1,0)^{\mathrm T}$ 为全局最优解.

3. 等式和不等式约束问题的最优性条件

$$\min f(X)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}g_i(X)\geqslant 0,\quad i = 1,2,\cdots,m\\ h_j(X) = 0,\quad j = 1,2,\cdots,l\end{cases}\tag{3}$$

定理5(库恩－塔克必要条件)　设 X^* 是问题(3)的可行解,$f,g_i(i\in I)$ 在 X^* 可微. $g_i(i\notin I)$ 在 X^* 连续,$h_j(j=1,2,\cdots,l)$ 在 X^* 连续可微,再假设 $\nabla g_i(X^*)(i\in I)$ 和 $\nabla h_j(X^*)(j=1,2,\cdots,l)$ 线性无关. 如果 X^* 是问题(3)的局部最优解,则存在 $\mu_i(i\in I)$ 和 $v_j(j=1,2,\cdots,l)$,使得

$$\begin{cases}\nabla f(X^*)-\sum_{i\in I}\mu_i\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(X^*)=0\\ \mu_i\geqslant 0,\forall i\in I\end{cases}\qquad \text{(K-T 条件,}X^*\text{ 为 K-T 点)}$$

如果再假设 $g_i(i\notin I)$ 在 X^* 也可微,则上述K-T条件可改为:

$$\begin{cases}\nabla f(X^*)-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(X^*)=0\\ \mu_ig_i(X^*)=0,\ i=1,\cdots,m\\ \mu_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m\end{cases}$$

6.2.3　有约束的非线性规划问题的求解方法

1. 非线性规划的线性逼近

代数方法,如迭代法,对于线性等式或不等式非常有效,以至很多非线性规划问题可以用与之近似的线性问题来代替,使问题简化. 下面我们介绍的近似规划法就是一种线性化方法.

近似规划法的基本思想:将问题(3)中的目标函数 $f(X)$ 和约束条件 $g_i(X)\geqslant 0\ (i=1,\cdots,m)$;$h_j(X)=0(j=1,\cdots,l)$ 近似为线性函数,并对变量的取值范围加以限制,从而得到一个近似线性规划问题,再用单纯形法求解之,把符合原始条件的最优解作为(3)的解的近似. 每得到一个近似解后,都从这点出发,重复以上步骤. 这样,通过求解一系列线性规划问题,产生一个由线性规划最优解组成的序列,经验表明,这样的序列往往收敛于非线性规划问题的解.

近似规划法的算法步骤如下:

(1) 给定初始可行点 $X^1=\{x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1\}$,步长限制 $\delta_j^1(j=1,\cdots,n)$,步长缩小系数 $\beta\in(0,1)$,允许误差 ε,令 $k=1$.

(2) 在点 X^k 处,将 $f(X),g_i(X),h_j(X)$ 按泰勒级数展开并取一阶近似,得到近似线性规划问题:

$$f(X)\approx f(X^k)+\nabla f(X^k)^T(X-X^k)$$
$$g_i(X)\approx g_i(X^k)+\nabla g_i(X^k)^T(X-X^k)\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m$$
$$h_j(X)\approx h_j(X^k)+\nabla h_j(X^k)^T(X-X^k)=0,\quad j=1,\cdots,l$$

(3) 在上述近似线性规划问题的基础上增加一组限制步长的线性约束条件. 因为线性近似通常只在展开点附近近似程度较高,故需要对变量的取值范围加以限制,所增加的约束条件是:

$$|x_j-x_j^k|\leqslant\delta_j^k\quad(j=1,\cdots,n)$$

求解该线性规划问题,得到最优解 X^{k+1}.

(4) 检验 X^{k+1} 点对原约束是否可行. 若 X^{k+1} 对原约束可行,则转步骤(5);否则,缩小步长限制,令 $\delta_j^k=\beta\delta_j^k(j=1,\cdots,n)$,返回步骤(3),重解当前的线性规划问题.

(5) 判断精度. 若 $|\delta_j^k|<\varepsilon(j=1,\cdots,n)$,则点 X^{k+1} 为近似最优解;否则,令 $\delta_j^{k+1}=\delta_j^k(j=1,\cdots,n)$,$k=k+1$,返回步骤(2).

用近似规划法求解非线性规划问题时，步长限制向量 δ^k 的选择对算法的影响很大. 如果 δ^k 取值太小，则收敛很慢；若 δ^k 取值太大，则线性规划的最优解往往会越出原始可行域，这样只得再减小 δ^k，重解当前的线性规划，从而增加计算量. δ^k 大小的选择与初始点、函数的性态等有关，须视具体情况而定.

例2 用近似规划法求解下列问题：

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{X}) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = 7 - x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 10 \end{cases}$$

给定初始可行点 $\boldsymbol{X}^1 = (3,2.5)^{\mathrm{T}}$，$\delta^1 = (2,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta = 0.5$.

解 第一次迭代：在点 $\boldsymbol{X}^1$ 处将 $g_1(\boldsymbol{X})$，$g_2(\boldsymbol{X})$ 线性化：

$$g_1(\boldsymbol{X}) \approx g_1(\boldsymbol{X}^1) + \nabla g_1(\boldsymbol{X}^1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^1)$$

$$= 9.75 + \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 2.5 \end{bmatrix} = 40.25 - 6x_1 - 5x_2 \geqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{X}) \approx g_2(\boldsymbol{X}^1) + \nabla g_2(\boldsymbol{X}^1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^1)$$

$$= 4.25 + \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 2.5 \end{bmatrix} = 9.75 - 6x_1 + 5x_2 \geqslant 0$$

步长限制：$|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^1| \leqslant \delta^1$，即 $-2 \leqslant x_1 - 3 \leqslant 2$，$-1 \leqslant x_2 - 2.5 \leqslant 1$.

再考虑到 x_1, x_2 本身的约束，得到近似线性规划问题：

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 40.25 - 6x_1 - 5x_2 \geqslant 0 \\ 9.75 - 6x_1 + 5x_2 \geqslant 0 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 1.5 \leqslant x_2 \leqslant 3.5 \end{cases}$$

把它化为线性规划的标准形：令 $y_1 = x_1 - 1$，$y_2 = x_2 - 1.5$，得

$$\min(-2y_1 - y_2 - 3.5)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 + y_3 = 26.75 \\ 6y_1 - 5y_2 + y_4 = 11.25 \\ y_1 \leqslant 4,\ y_2 \leqslant 2,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解，可得 $\boldsymbol{X}^2 = \left(4\dfrac{1}{6}, 3\dfrac{1}{20}\right)^{\mathrm{T}}$，经检验 $\boldsymbol{X}^2$ 不满足原始约束.

第二次迭代：取 $\beta = 0.5$，减小步长限制为 $\boldsymbol{\delta}^1 = (1, 0.5)^{\mathrm{T}}$，返回去修改上述近似线性规划中的步长限制，得新的近似线性规划问题为：

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 40.25 - 6x_1 - 5x_2 \geqslant 0 \\ 9.75 - 6x_1 + 5x_2 \geqslant 0 \\ 2 \leqslant x_1 \leqslant 4,\ 2 \leqslant x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$

与第一次迭代类似,先把上述问题化为线性规划的标准形,再用单纯形法求之,即可得:

$$X^2 = (4,3)^T,\quad f(X^2) = -11$$

经检验可知,此 X^2 点已是原问题的最小值点.

2. 罚函数法

罚函数法基本思想是通过构造罚函数把约束问题转化为一系列无约束最优化问题,进而用无约束最优化方法去求解.这类方法称为**序列无约束最小化方法**.简称为 **SUMT**.其一为 **SUMT 外点法**,其二为 **SUMT 内点法**.

(1) SUTM 外点法

对于等式约束

$$\begin{aligned}&\min f(X)\\&\text{s.t. } h_j(X) = 0,\ j = 1,2,\cdots,l\end{aligned}$$

可转化为求:$\min\limits_{X\in\mathbf{R}^n} T(X,M) = f(X) + M\sum\limits_{j=1}^{l}[h_j(X)]^2$,其中 M 是一个较大的正数.

对不等式约束,由于 $g_i(X)\geqslant 0$ 等价于等式约束:$\min(0,g_i(X))=0$.于是对一般的非线性规划问题,可设:

$$T(X,M) = f(X) + M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2 + M\sum_{j=1}^{l}[h_j(X)]^2 \tag{4}$$

将问题(3)转化为无约束问题:

$$\min_{X\in\mathbf{R}^n} T(X,M) \tag{5}$$

其中 $T(X,M)$ 称为**罚函数**,M 称为**罚因子**,带 M 的项称为**罚项**.这里的罚函数只对不满足约束条件的点实行惩罚:当 $X\in D$ 时,满足各 $g_i(X)\geqslant 0, h_i(X)=0$,故罚项等于 0,不受惩罚;当 $X\notin D$ 时,必有 $g_i(X)<0$ 或 $h_i(X)\neq 0$ 的约束条件,故罚项大于 0,要受惩罚.

定理 6 若对某个确定的数 $M(>0)$,无约束问题(5)的最优解 $X(M)\in D$(可行集),则 $X(M)$ 必定是问题(3)的最优解.

定理 6 说明只要求出无约束极值问题(5)的最优解,若它包含在可行集 D 内,那么就相当于求出了问题(4)的最优解.

实际计算中,罚因子 M 的值取得过大、过小都不好.一般方法是,若问题(5)的最优解 $X(M)\notin D$,则取 $M_1>M>0$ 来替换问题(5)中的 M,重复上述讨论,可以证明相应问题的最优解.$X^1(M_1)$若不属于 D,则 X^1 与 D 的距离必定小于 X 与 D 的距离,随着 M_k 值的增加,罚函数中的罚项作用越来越大,即对点脱离可行域的惩罚越来越重,这就迫使罚函数的极小点 X^k 与可行域 D 的“距离”越来越近.当 M_k 趋于∞时,点列 $\{X^k\}$ 就从可行域外部趋于原问题的极小点.如此便将问题(3)转化为一系列的无约束问题($0<M<M_1<M_2<\cdots\to\infty$).因此此方法也叫 **SUTM 外点法(罚函数法)**.

罚函数法的迭代步骤:

①任意给定初始点 X^0,取 $M_1>0$,给定允许误差 $\varepsilon>0$,令 $k=1$.

②求无约束极值问题 $\min\limits_{X\in\mathbf{R}^n} T(X,M_k)$ 的最优解,设为 $X^k=X(M_k)$,即

$$\min_{X\in\mathbf{R}^n} T(X,M_k) = T(X^k,M_k)$$

③若存在 $i(1\leqslant i\leqslant m)$,使 $-g_i(X^k)>\varepsilon$,则取 $M_{k+1}>M$(如取 $M_{k+1}=\alpha M,\alpha=10$),令 $k=k+1$ 返回②;否则,停止迭代,得最优解 $X^*\approx X^k$.

需指出的是,上述计算方法对 $f(X)$、$-g_i(X)$ 没有凸性要求,规划问题不一定是凸规划,因此,可以说罚函数法提供了求解非凸规划问题的一种方法.

罚函数法的缺点是,每个近似最优解 X^k 往往不是容许解,而只能近似满足约束,在实际问题中这种结果可能不能使用;在解一系列无约束问题中,计算量太大,特别是随着 M_k 的增大,可能会导致错误.

(2) SUTM 内点法(障碍函数法)

考虑问题

$$\begin{aligned}&\min\quad f(X)\\&\text{s.t.}\quad g_i(X)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{6}$$

设集合 $D^0=\{X|g_i(X)>0,i=1,2,\cdots,m\}\neq\varnothing$,即 D^0 是可行域中所有严格内点的集合.

引入单变量函数:$\varphi(t)=-\ln t$ 或 $\varphi(t)=1/t(t>0)$,以此构造障碍函数 $I(X,r)$:

$$I(X,r)=f(X)-r\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(X)$$

或

$$I(X,r)=f(X)+r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)}$$

其中,称 $-r\sum\limits_{i=1}^{m}\ln g_i(X)$ 或 $r\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{g_i(X)}$ 为障碍项,r 为障碍因子.

这样问题(6)就转化为求一系列无约束性质的极值问题:$\min\limits_{X\in D^0}I(X,r_k)$,求其最优解,并记为 $X^k(r_k)$.

内点法的思路是在约束区域 D 的边界筑起一道"墙",当迭代点 X^k 靠近边界时,函数值陡然增大起来,于是最优点 X^* 就被"挡"在可行集 D 内部了.从而在 D 内部求解一系列无约束极值的最优解以逐步逼近原问题的最优解.

使用范围:只适用于不等式约束的最优化问题.

定理7　考虑 $I(X,r_k)=f(X)+r_k\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{g_i(X)}$.设 $\min\limits_{X\in D^0}I(X,r_k)$ 的最优解 X^k 及问题(5)的最优解 X^* 存在,且 $f(X)$,$g_i(X)$ 为连续函数,点列 $\{X^k\}$ 有界,$D^0\neq\varnothing$ 且 D^0 的闭包 $clD^0=D$,$\{r_k\}$ 满足 $r_1>r_2>\cdots>r_k>\cdots>0$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=0$,则

①点列 $\{X^k\}$ 的任意极限点都是问题(5)的最优解;

② $\{f(X^k)\}$ 为单调下降数列,$\lim\limits_{k\to\infty}f(X^k)=f^*=\lim\limits_{X\in D}f(X)$,$\lim\limits_{k\to\infty}X^k=X^*$.

内点法的迭代步骤:

①给定允许误差 $\varepsilon>0$,取 $r_0>0$,$0<\beta<1$.

②求出约束集合 D 的一个内点 $X^0\in D^0$,令 $k=1$.

③以 $X^{k-1}\in D^0$ 为初始点,求解 $\min\limits_{X\in D^0}I(X,r_k)$ 的最优解,设为 $X^k=X(r_k)\in D^0$.

④检验是否满足 $\left|-r_k\sum\limits_{i=1}^{m}\ln g_i(X^k)\right|\leqslant\varepsilon$ 或 $\left|r_k\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{g_i(X)}\right|\leqslant\varepsilon$,若满足,则停止迭代,

$X^* \approx X^k$;否则取 $r_{k+1} = \beta r_k$,令 $k = k+1$,返回③.

SUTM 内点法的优点是每步迭代得到的最优解都在 D 内,故易得较好的近似最优解.缺点是在解一系列无约束问题中,计算量太大.r_k 的选取对收敛速度很重要,特别是随着 r_k 的减小,可能导致错误.不能处理等式约束.改进的方法是用内、外点法合用的混合罚函数法等.

例 3 用内点法求下列规划问题的极值.

$$\min\ f(X) = \frac{1}{12}(x_1+1)^3 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 求解具有无约束性质的极值问题

$$\min_{X \in D^0} I(X,r) = \frac{1}{12}(x_1+1)^3 + x_2 + r\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

求 $I_{x_1} = \frac{1}{4}(x_1+1)^2 - \frac{r}{(x_1-1)^2}$,$I_{x_2} = 1 - \frac{r}{x_2^2}$的驻点,得 $x_1 = \sqrt{1+2\sqrt{r}}$,$x_2 = \sqrt{r}$,当 $r \to 0$ 时,得极限值 $x_1 = 1$,$x_2 = 0$.所以原问题的最优解为 $X^* = (1,0)^T$.

6.3 用 MATLAB 优化工具箱解非线性规划

6.3.1 二次规划的解法

二次规划的标准型为:

$$\min\ Z = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b} \\ Aeq \cdot \boldsymbol{X} = beq \\ \text{VLB} \leqslant \boldsymbol{X} \leqslant \text{VUB} \end{cases}$$

用 MATLAB 软件求解,其输入格式如下:

```
1. x = quadprog(H,C,A,b);
2. x = quadprog(H,C,A,b,Aeq,beq);
3. x = quadprog(H,C,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB);
4. x = quadprog(H,C,A,b, Aeq,beq ,VLB,VUB,X0);
5. x = quadprog(H,C,A,b, Aeq,beq ,VLB,VUB,X0,options);
6. [x,fval] = quadprog(…);
7. [x,fval,exitflag] = quadprog(…);
8. [x,fval,exitflag,output] = quadprog(…).
```

例 1 $\min f(x_1,x_2) = -2x_1 - 6x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 2\\ -x_1+2x_2\leqslant 2\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

写成标准形式

$$\min z=\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

编写 M 文件 youh1.m 如下：

```
H=[1 -1; -1 2];
c=[-2 ;-6];A=[1 1; -1 2];b=[2;2];
Aeq=[];beq=[];
VLB=[0;0];VUB=[];
[x,z]=quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB)
```

运算结果为：

```
x =
   0.6667
   1.3333
z = -8.2222
```

6.3.2　非线性规划的解法

非线性规划的标准型为：

$$\min F(\boldsymbol{X})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b}\\ Aeq\cdot\boldsymbol{X}=beq\\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})\leqslant 0\\ Ceq(\boldsymbol{X})=0\\ \text{VLB}\leqslant\boldsymbol{X}\leqslant\text{VUB}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维变元向量，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$ 与 $Ceq(\boldsymbol{X})$ 均为非线性函数组成的向量，其他变量的含义与线性规划、二次规划中相同．用 MATLAB 求解上述问题，基本步骤分三步：

1. 首先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数 F(X)：

```
function f=fun(X);
f=F(X);
```

2. 若约束条件中有非线性约束：$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 或 $Ceq(\boldsymbol{X})=0$，则建立 M 文件 nonlcon.m 定义

函数 $G(X)$ 与 $Ceq(X)$：

```
function [G,Ceq] = nonlcon(X)
G = ...
Ceq = ...
```

3. 建立主程序.非线性规划求解的函数是 fmincon,命令的基本格式如下：

(1) x = fmincon('fun',X0,A,b)

(2) x = fmincon('fun',X0,A,b,Aeq,beq)

(3) x = fmincon('fun',X0,A,b, Aeq,beq,VLB,VUB)

(4) x = fmincon('fun',X0,A,b, Aeq,beq,VLB,VUB,'nonlcon')

(5) x = fmincon('fun',X0,A,b, Aeq,beq,VLB,VUB,'nonlcon',options)

(6) [x,fval] = fmincon(…)

(7) [x,fval,exitflag] = fmincon(…)

(8) [x,fval,exitflag,output] = fmincon(…)

注意：

[1] fmincon 函数提供了大型优化算法和中型优化算法.默认时,若在 fun 函数中提供了梯度(options 参数的 GradObj 设置为'on'),并且只有上下界存在或只有等式约束,fmincon 函数将选择大型算法.当既有等式约束又有梯度约束时,使用中型算法.

[2] fmincon 函数的中型算法使用的是序列二次规划法.在每一步迭代中求解二次规划子问题,并用 BFGS 法更新拉格朗日黑塞矩阵.

[3] fmincon 函数可能会给出局部最优解,这与初值 X0 的选取有关.请参见例 5.

例 2 $\min\ f = -x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

写成标准形式：

$$\min f = -x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

先建立 M 文件 fun3.m：

```
function f = fun3(x);
f = -x(1) -2*x(2) +(1/2)*x(1)^2 +(1/2)*x(2)^2
```

再建立主程序 youh2.m：

```
x0 =[1;1];
A =[2 3 ;1 4]; b =[6;5];
```

```
Aeq = [ ];beq = [ ];
VLB = [0;0]; VUB = [ ];
[x,fval] = fmincon('fun3',x0,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB)
```

运算结果为：

```
x =
    0.7647
    1.0588
fval =
      -2.0294
```

例 3 $\min f(X) = e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ -x_1x_2 - 10 \leqslant 0 \end{cases}$$

先建立 M 文件 fun4.m 定义目标函数：

```
function f = fun4(x);
f = exp(x(1)) * (4 * x(1)^2 +2 * x(2)^2 +4 * x(1) * x(2) +2 * x(2) +1);
```

再建立 M 文件 mycon.m 定义非线性约束：

```
function [g,ceq] = mycon(x)
g = [x(1) +x(2);1.5 +x(1) * x(2) - x(1) - x(2); -x(1) * x(2) -10];
```

主程序 youh3.m 为：

```
x0 = [ -1;1];
A = [ ];b = [ ];
Aeq = [1 1];beq = [0];
VLB = [ ];VUB = [ ];
[x,fval] = fmincon('fun4',x0,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB,'mycon')
```

运算结果为：

```
x =
    -1.2250
     1.2250
fval = 1.8951
```

例 4 $\min f(X) = -2x_1 - x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(X) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ g_2(X) = 7 - x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 5, 0 \leqslant x_2 \leqslant 10 \end{cases}$$

先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数：

```
function f = fun(x);
f = -2 * x(1) - x(2);
```

再建立 M 文件 mycon2.m 定义非线性约束：

```
function [g,ceq] =mycon2(x)
g =[x(1)^2 +x(2)^2 -25;x(1)^2 -x(2)^2 -7];
```

主程序 fxx.m 为：

```
x0 =[3;2.5];
VLB =[0 0];VUB =[5 10];
[x,fval,exitflag,output] = fmincon('fun',x0,[],[],[],[],VLB,VUB,
'mycon2')
```

运算结果为：

```
x =
   4.0000
   3.0000
fval = -11.0000
exitflag =1
output =
         iterations:4
         funcCount:17
         stepsize:1
         lgorithm:[1x44 char]
         firstorderopt:[]
         cgiterations:[]
```

例 5 供应与选址：某公司有 6 个建筑工地要开工，每个工地的位置（用平面坐标系 a,b 表示，距离单位：km）及水泥日用量 d（单位：t）由表 6-1 给出. 目前有两个临时料场位于 $A(5,1)$，$B(2,7)$，日储量各有 20 t. 假设从料场到工地之间均有直线道路相连.（1）试制定每天的供应计划，即从 A，B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨千米数最小.（2）为了进一步减少吨千米数，打算舍弃这两个临时料场，改建两个新的，日储量各为 20 t，问应建在何处，节省的吨千米数为多大？

表 6-1 工地位置（a,b）及水泥日用量 d

	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

（1）建立模型

记工地的位置为 (a_i,b_i)，水泥日用量为 d_i，$i=1,\cdots,6$；料场位置为 (x_j,y_j)，日储量为 e_j，$j=1,2$；从料场 j 向工地 i 的运送量为 X_{ij}.

目标函数为：

$$\min f = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} X_{ij}\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2}$$

$$\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = d_i,\quad i = 1,2,\cdots,6$$

约束条件为：

$$\sum_{i=1}^{6} X_{ij} \leqslant e_j,\quad j = 1,2$$

当用临时料场时决策变量为 X_{ij}，当不使用临时料场时决策变量为：X_{ij}, x_j, y_j.

(2) 使用临时料场的情形

使用两个临时料场 $A(5,1)$，$B(2,7)$. 求从料场 j 向工地 i 的运送量 X_{ij}，在各工地用量必须满足和各料场运送量不超过日储量的条件下，使总的吨千米数最小，这是线性规划问题. 线性规划模型为：

$$\min f = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} aa(i,j)X_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = d_i, & i = 1,2,\cdots,6\\ \sum_{i=1}^{6} X_{ij} \leqslant e_j, & j = 1,2\end{cases}$$

其中 $aa(i,j) = \sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2}$，$i = 1,2,\cdots,6$；$j = 1,2$. 设

$$X_{11} = X_1,\quad X_{21} = X_2,\quad X_{31} = X_3,\quad X_{41} = X_4,\quad X_{51} = X_5,\quad X_{61} = X_6$$

$$X_{12} = X_7,\quad X_{22} = X_8,\quad X_{32} = X_9,\quad X_{42} = X_{10},\quad X_{52} = X_{11},\quad X_{62} = X_{12}$$

编写程序 gying1.m 如下：

```
clear
a =[1.25 8.75 0.5 5.75 3 7.25];
b =[1.25 0.75 4.75 5 6.5 7.75];
d =[3 5 4 7 6 11];
x =[5 2];
y =[1 7];
e =[20 20];
for  i =1:6
  for j =1:2
    aa(i,j) =sqrt((x(j) -a(i))^2 +(y(j) -b(i))^2);
  end
end
CC =[aa(:,1); aa(:,2)]';
A =[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1];
```

```
B=[20;20];
Aeq=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
     0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0
     0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0
     0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0
     0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 ];
beq=[d(1);d(2);d(3);d(4);d(5);d(6)];
VLB=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];VUB=[];
x0=[1 2 3 0 1 0 0 1 0 1 0 1];
[x,fval]=linprog(CC,A,B,Aeq,beq,VLB,VUB,x0)
```

计算结果为：

```
x=[3.0000  5.0000  0.0000  7.0000  0.0000  1.0000  0.0000  0.0000
   4.0000  0.0000  6.0000  0.0000]'
fval=136.2275
```

即由料场 A、B 向 6 个工地运料方案为：

	1	2	3	4	5	6
料场 A	3	5	0	7	0	1
料场 B	0	0	4	0	6	10

总的吨千米数为 136.227 5.

(3) 改建两个新料场的情形

改建两个新料场，要同时确定料场的位置 (x_j, y_j) 和运送量 X_{ij}，在同样条件下使总吨千米数最小. 这是非线性规划问题. 非线性规划模型为：

$$\min f = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} X_{ij}\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = d_i, & i = 1,2,\cdots,6\\ \sum_{i=1}^{6} X_{ij} \leqslant e_j, & j = 1,2\end{cases}$$

设

$$X_{11}=X_1,\quad X_{21}=X_2,\quad X_{31}=X_3,\quad X_{41}=X_4,\quad X_{51}=X_5,\quad X_{61}=X_6$$
$$X_{12}=X_7,\quad X_{22}=X_8,\quad X_{32}=X_9,\quad X_{42}=X_{10},\quad X_{52}=X_{11},\quad X_{62}=X_{12}$$
$$x_1=X_{13},\quad y_1=X_{14},\quad x_2=X_{15},\quad y_2=X_{16}$$

先编写 M 文件 liaoch.m 定义目标函数：

```
function f=liaoch(x)
a=[1.25 8.75 0.5 5.75 3 7.25];
```

```
b=[1.25 0.75 4.75 5 6.5 7.75];
d=[3 5 4 7 6 11];
e=[20 20];
f1=0;
for  i=1:6
  s(i)=sqrt((x(13)-a(i))^2+(x(14)-b(i))^2);
  f1=s(i)*x(i)+f1;
end
f2=0;
for  i=7:12
  s(i)=sqrt((x(15)-a(i-6))^2+(x(16)-b(i-6))^2);
  f2=s(i)*x(i)+f2;
end
f=f1+f2;
```

取初值为线性规划的计算结果及临时料场的坐标:

```
x0=[3 5 0 7 0 1 0 0 4 0 6 10 5 1 2 7]';
```

编写主程序 gying2.m 如下:

```
clear
x0=[3 5 0 7 0 1 0 0 4 0 6 10 5 1 2 7]';
A=[1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0];
B=[20;20];
Aeq=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
     0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
     0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
     0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
     0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0];
beq=[3 5 4 7 6 11]';
VLB=[zeros(12,1);-inf;-inf;-inf;-inf];
VUB=[];
[x,fval,exitflag]=fmincon('liaoch',x0,A,B,Aeq,beq,VLB,VUB)
```

计算结果为:

```
x=[3.0000  5.0000  0.0707  7.0000  0  0.9293  0  0  3.9293  0  6.0000
   10.0707  6.3875  4.3943  5.7511  7.1867]'
fval=105.4626
exitflag=1
```

即两个新料场的坐标分别为(6.387 5, 4.394 3),(5.751 1, 7.186 7),由料场 A、B 向 6 个工地运料方案为:

	1	2	3	4	5	6
料场 A	3	5	0.070 7	7	0	0.929 3
料场 B	0	0	3.929 3	0	6	10.070 7

总的吨千米数为 105.462 6. 比用临时料场节省约 31 吨千米.

若修改主程序 gying2.m, 取初值为上面的计算结果:

```
x0 =[3.0000  5.0000  0.0707  7.0000  0  0.9293  0  0  3.9293  0
     6.0000  10.0707  6.3875  4.3943  5.7511  7.1867]'
```

得结果为:

```
x =[3.0000  5.0000  0.3094  7.0000  0.0108  0.6798  0  0  3.6906  0
    5.9892  10.3202  5.5369  4.9194  5.8291  7.2852]'
fval =103.4760
exitflag =1
```

总的吨千米数比上面结果略优.

若再取刚得出的结果为初值, 却计算不出最优解.

若取初值为:x0 =[3 5 4 7 1 0 0 0 0 0 5 11 5.6348 4.8687 7.2479 7.7499]', 则计算结果为:

```
x =[3.0000  5.0000  4.0000  7.0000  1.0000  0  0  0  0  0  5.0000
    11.0000  5.6959  4.9285  7.2500  7.7500]'
fval =89.8835
exitflag = 1
```

总的吨千米数 89.883 5 比上面结果更好.

通过此例可看出 fmincon 函数在选取初值上的重要性.

6.4 建模案例:钢管订购和运输优化模型

6.4.1 问题的提出

要铺设一条 $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{15}$ 的输送天然气的主管道,如图 6-1 所示. 经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有 $S_1, S_2, \cdots, S_7$. 图中粗线表示铁路,单细线表示公路,双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路,或者建有施工公路),圆圈表示火车站,每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位:km).

为方便计,1 km 主管道钢管称为 1 单位钢管.

一个钢厂如果承担制造这种钢管,至少需要生产 500 个单位. 钢厂 S_i 在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 s_i 个单位,钢管出厂销价 1 单位钢管为 p_i 万元,如下表:

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1 000	2 000	2 000	2 000	3 000
p_i	160	155	155	160	155	150	160

1 单位钢管的铁路运价如下表：

里程(km)	≤300	301～350	351～400	401～450	451～500
运价(万元)	20	23	26	29	32
里程(km)	501～600	601～700	701～800	801～900	901～1 000
运价(万元)	37	44	50	55	60

1 000 km 以上每增加 1 至 100 km 运价增加 5 万元.

公路运输费用为 1 单位钢管 0.1 万元每千米(不足整千米部分按整千米计算).

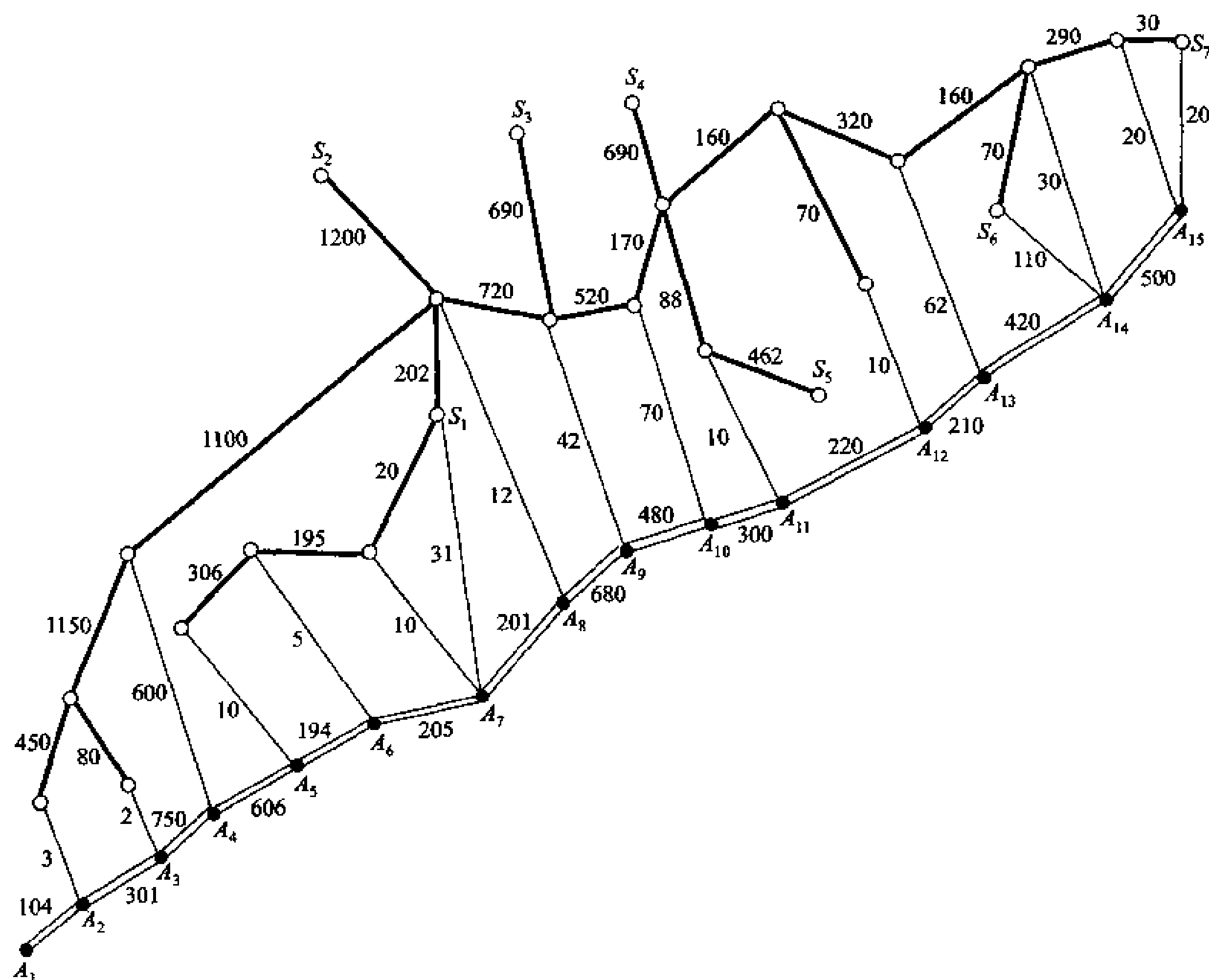


图 6－1

钢管可由铁路、公路运往铺设地点(不只是运到点 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$,而是管道全线).

(1) 请制定一个主管道钢管的订购和运输计划,使总费用最小(给出总费用).

(2) 请就(1)的模型分析:哪个钢厂钢管销价的变化对购运计划和总费用影响最大,哪个钢厂钢管产量的上限变化对购运计划和总费用的影响最大,并给出相应的数字结果.

(3) 如果要铺设的管道不是一条线,而是一个树形图,铁路、公路和管道构成网络,请就这种更一般的情形给出一种解决办法,并对图 6-2 按(1)的要求给出模型和结果.

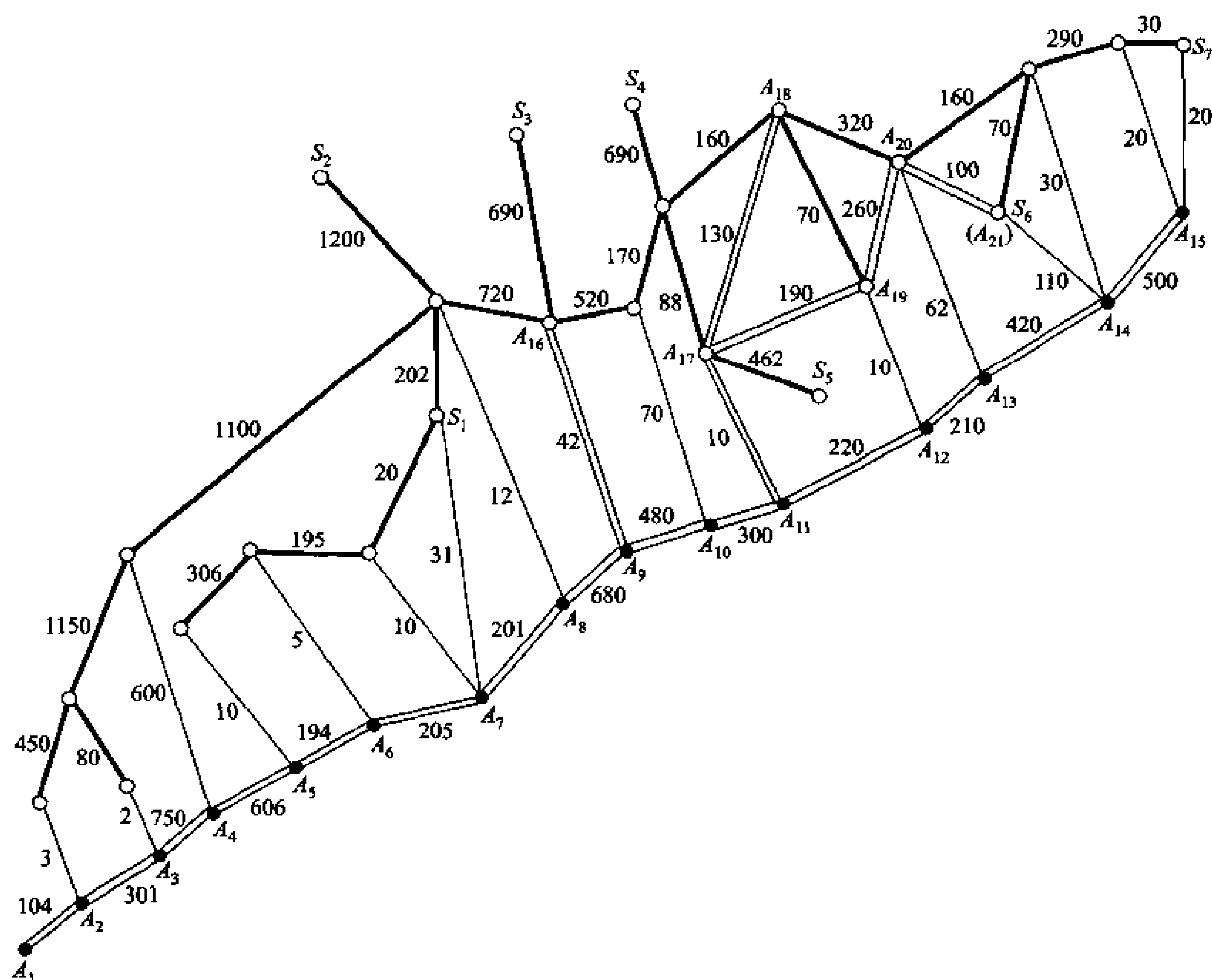


图 6-2

6.4.2 基本假设

1. 沿铺设的主管道已经有公路或者有施工公路.
2. 1 km 主管道钢管称为 1 单位钢管,在主管道上,每千米卸 1 单位的钢管.
3. 公路运输费用为 1 单位钢管 0.1 万元每千米(不足整千米部分按整千米计算)
4. 在计算总费用时,只考虑运输费和购买钢管的费用,而不考虑其他费用.

5. 假设钢管在铁路运输路程超过 1 000 km 时,铁路每增加 1 至 100 km,1 单位钢管的运价增加 5 万元.

6.4.3 符号说明

S_i:第 i 个钢厂, $i=1,2,\cdots,7$.

s_i:第 i 个钢厂的最大产量, $i=1,2,\cdots,7$.

A_j:输送天然气的主管道上的第 j 个点, $j=1,2,\cdots,15$.

p_i:第 i 个钢厂 1 单位钢管的销售价格, $i=1,2,\cdots,7$.

x_{ij}:钢厂 S_i 向第 j 个点 A_j 运输的钢管数量(单位),$i=1,2,\cdots,7;j=1,2,\cdots,15$.

y_j:在点 A_j 与点 A_{j+1}之间的公路上,运输点 A_j向点 A_{j+1}方向铺设的钢管量,$j=1,2,3,\cdots,14$.

A_{ij}:1 单位钢管从钢厂 S_i 到点 A_j的最少总费用,即公路运费、铁路运费和钢管销售价格之和,$i=1,2,\cdots,7;j=1,2,\cdots,15$.

b_j:与第 j 个点 A_j相连的公路和铁路的相交点, $j=2,3,\cdots,15$.

b_{jm}:与第 j 个点 A_j相连的第 m 条公路和铁路的相交点, $j=2,3,\cdots,15;m\geqslant 2$.

d_j:相邻结点 A_j与 A_{j+1}之间的距离, $j=1,2,\cdots,14$.

6.4.4 模型的建立与求解

问题一:讨论如何调整主管道钢管的订购和运输方案使总费用最小.

由题意可知,将钢管从钢厂 S_i 运输到第 j 个点 A_j的费用 A_{ij}包括钢管的销售价格、钢管的铁路运输费用和钢管的公路运输费用. 在费用 A_{ij}最小时,对钢管的订购和运输进行分配,可得出本问题的最佳方案.

1. 求钢管从钢厂 S_i 运到运输点 A_j的最小费用

1) 将图 6-1 转换为一系列以单位钢管的运输费用为权的**赋权图**.

由于钢管从钢厂 S_i 运到运输点 A_j要通过铁路和公路运输,而铁路运输费用是分段函数,与全程运输总距离有关. 又由于钢厂 S_i 直接与铁路相连,所以可利用图 6-3 给出的铁路网络图,利用图论软件包先求出钢厂 S_i 到铁路与公路相交点 b_j的最短路径.

依据钢管的铁路运价表,算出钢厂 S_i 到铁路与公路相交点 b_j的最小铁路运输费用,并把费用作为边权赋给从钢厂 S_i 到 b_j的边. 再将与 b_j相连的公路、运输点 A_i 及其与之相连的要铺设管道的线路(也是公路)添加到图上,根据单位钢管在公路上的运价规定,得出每一段公路的运费,并把此费用作为边权赋给相应的边. 以 S_1 为例得图 6-4.

再用图论软件包求出钢厂 S_1 到各运输点 $A_j(j=1,2,\cdots,15)$的最短路,从而得出将单位钢管从 S_1 运输到各运输点 A_j 的最小费用.

运费依次为:170.7,160.3,140.2,98.6,38,20.5,3.1,21.2,64.2,92,96,106,121.2,128,142(单位:万元). 加上单位钢管的销售价格 $p_1=160$,得出从钢厂 S_1 购买单位钢管并运输到点 A_j的最小费用 A_{1j}依次为:330.7,320.3,300.2,258.6,198,180.5,163.1,181.2,224.2,252,256,266,281.2,288,302(单位:万元).

同理,可求出钢厂 S_2、S_3、S_4、S_5、S_6、S_7 到点 A_j的最小费用,从而得出各钢厂 S_i 到各运输结点 A_j的最小总费用(单位:万元)见表 6-2.

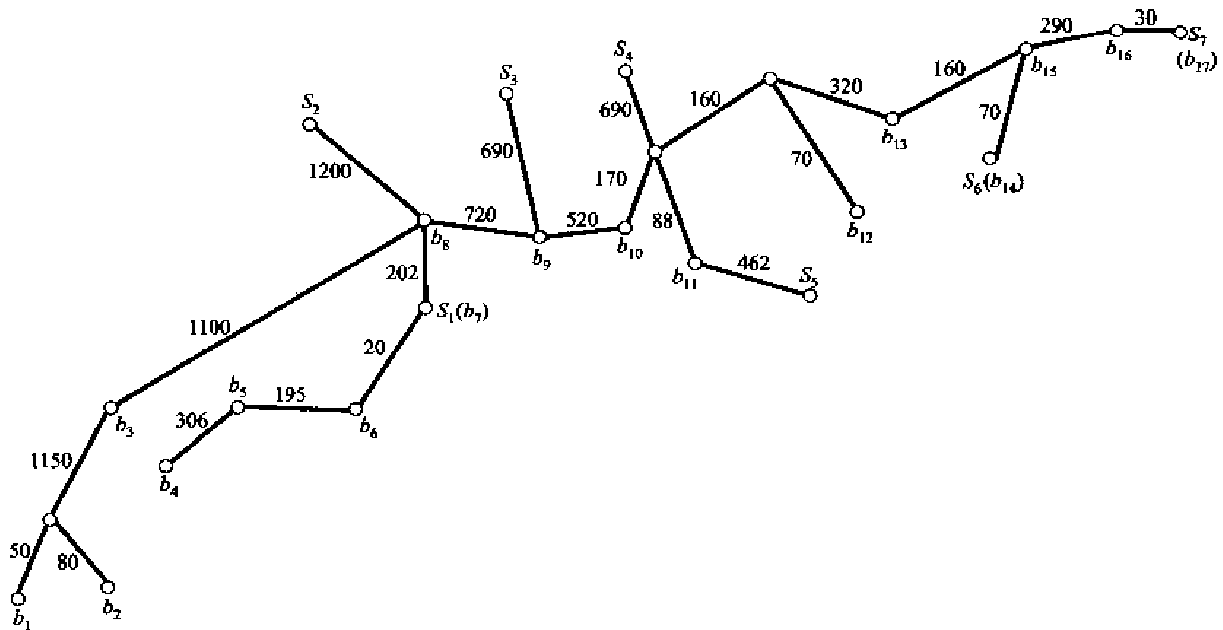


图 6-3 铁路网络图

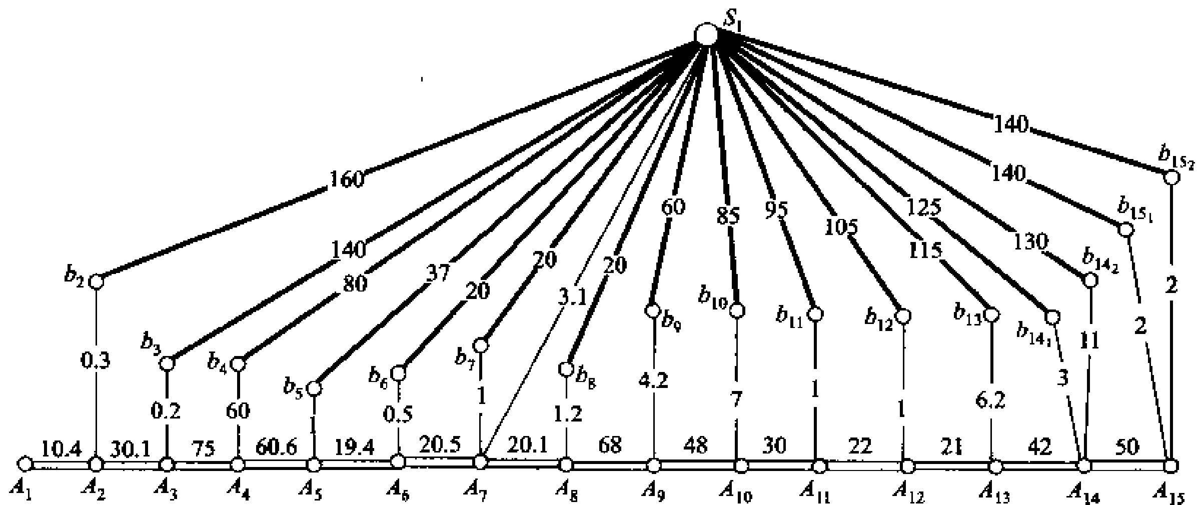


图 6-4

表 6-2 S_i 到点 A_j 的最小费用

	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_1	320.3	300.2	258.6	198	180.5	163.1	181.2	224.2	252	256	266	281.2	288	302
S_2	360.3	345.2	326.6	266	250.5	241	226.2	269.2	297	301	311	326.2	333	347
S_3	375.3	355.2	336.6	276	260.5	251	241.2	203.2	237	241	251	266.2	273	287
S_4	410.3	395.2	376.6	316	300.5	291	276.2	244.2	222	211	221	236.2	243	257
S_5	400.3	380.2	361.6	301	285.5	276	266.2	234.2	212	188	206	226.2	228	242
S_6	405.3	385.2	366.6	306	290.5	281	271.2	234.2	212	201	195	176.2	161	178
S_7	425.3	405.2	386.6	326	310.5	301	291.2	259.2	237	226	216	198.2	186	162

2. 建立模型

1）目标函数

运输总费用可分为两部分：

运输总费用 = 钢厂到各结点的运输费用 + 主管道的运输费用

若运输结点 A_j 向钢厂 S_i 订购 x_{ij} 单位钢管，则钢管从钢厂 S_i 运到运输点 A_j 所需的费用为 $A_{ij}x_{ij}$. 由于钢管运到 A_1 必须经过 A_2，所以可不考虑 A_1，那么所有钢管从各钢厂运到各运输点上的总费用为：$\sum_{j=2}^{15}\sum_{i=1}^{7} x_{ij}A_{ij}$.

当钢管从钢厂 S_i 运到点 A_j 后，钢管就要向运输点 A_j 的左右两边 A_jA_{j+1} 段和 $A_{j-1}A_j$ 段运输（铺设）管道. 设 A_j 向 A_jA_{j+1} 段铺设的管道长度为 y_j，根据假设 2，则 A_j 向 A_jA_{j+1} 段的运输费用为 $0.1\times(1+2+\cdots+y_j)=\frac{y_j(y_j+1)}{20}$（万元）；由于相邻运输点 A_j 与 A_{j+1} 之间的距离为 d_j，那么 A_{j+1} 向 A_jA_{j+1} 段铺设的管道长为 d_j-y_j，同理可求其对应的铺设费用为：$\frac{(d_j-y_j+1)(d_j-y_j)}{20}$（万元）. 从而，总的铺设费用为：

$$\sum_{j=1}^{14}\left(\frac{y_j(y_j+1)}{20}+\frac{(d_j-y_j+1)(d_j-y_j)}{20}\right)$$

y_j 表示结点 A_j 与 A_{j+1} 之间的平衡点（$y_1=0,y_{15}=0$），铺设方法如图 6-5：



图 6-5

从而得出总费用为：

$$f=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=2}^{15}x_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{14}\left(\frac{y_j(y_j+1)}{20}+\frac{(d_j-y_j+1)(d_j-y_j)}{20}\right)$$

2）约束条件

因为一个钢厂如果承担制造钢管任务，至少需要生产 500 个单位，钢厂 S_i 在指定期限内最大生产量为 s_i 个单位，故 $500\leqslant\sum_{j=2}^{15}x_{ij}\leqslant s_i$ 或 $\sum_{j=2}^{15}x_{ij}=0\quad(i=1,2,\cdots,7)$.

因为运到结点 A_j 的钢管只提供 $A_{j-1}A_j$ 和 A_jA_{j+1} 段的铺设，且钢管运到 A_1 必须经过 A_2，所以 $y_1=0$. A_{15} 是终点，所以 $y_{15}=0$.

故有：$\sum_{i=1}^{7}x_{ij}=d_{j-1}-y_{j-1}+y_j\quad(j=2,3,\cdots,15)$.

因此本问题可建立如下的非线性规划模型：

$$\min f=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=2}^{15}x_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{14}\left(\frac{y_j(y_j+1)}{20}+\frac{(d_j-y_j)(d_j+1-y_j)}{20}\right)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 500 \leqslant \sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i \text{ 或 } \sum_{j=2}^{15} x_{ij} = 0 & i = 1,2,\cdots,7 \\ x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_i \leqslant d_i & (i = 1,\cdots,7; j = 2,\cdots,15) \\ d_{j-1} - y_{j-1} + y_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij} & j = 2,3,\cdots,15 \end{cases}$$

3. 模型求解

非线性规划模型可用 MATLAB 软件包或 LINGO 软件包来求解,但这些软件包都不能直接处理约束条件:$500 \leqslant \sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i$ 或 $\sum_{j=2}^{15} x_{ij} = 0$,我们可先应用分支定界法将此条件改为 $\sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i$,得到如下模型:

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^{14} \left(\frac{y_j(y_j+1)}{20} + \frac{(d_j - y_j)(d_j + 1 - y_j)}{20} \right)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i & i = 1,2,\cdots,7 \\ x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_i \leqslant d_i & (i = 1,\cdots,7; j = 2,\cdots,15) \\ d_{j-1} - y_{j-1} + y_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij} & j = 2,3,\cdots,15 \end{cases}$$

该模型我们用 LINGO 软件包来求解,分析计算结果后发现购运方案中钢厂 S_7 的生产量大于零但不足 500 单位,而其余钢厂的生产量都满足要求,下面我们采用不让钢厂 S_7 生产和要求钢厂 S_7 的产量不小于 500 个单位两种方法计算:

1) 不让钢厂 S_7 生产,模型变为:

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^{14} \left(\frac{y_j(y_j+1)}{20} + \frac{(d_j - y_j)(d_j + 1 - y_j)}{20} \right)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i & i = 1,2,\cdots,6 \\ x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_i \leqslant d_i & (i = 1,\cdots,6; j = 2,\cdots,15) \\ d_{j-1} - y_{j-1} + y_j = \sum_{i=1}^{16} x_{ij} & j = 2,3,\cdots,15 \end{cases}$$

用 LINGO 软件包求解,其计算结果:$f_1 = 1\,278\,632$(万元)(此时每个钢厂的产量都满足约束条件).

2) 要求钢厂 S_7 的产量不小于 500 个单位,模型变为:

$$\min f_2 = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^{14} \left(\frac{y_j(y_j+1)}{20} + \frac{(d_j - y_j)(d_j + 1 - y_j)}{20} \right)$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\sum_{j=2}^{15} x_{ij} \leqslant s_i & i = 1,2,\cdots,6 \\
x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_i \leqslant d_i & (i = 1,\cdots,7;\ j = 2,\cdots,15) \\
d_{j-1} - y_{j-1} + y_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij} & j = 2,3,\cdots,15 \\
500 \leqslant \sum_{j=2}^{15} x_{7j} \leqslant s_7
\end{cases}
$$

用 LINGO 软件包求解，其计算结果：$f_2 = 1\ 279\ 664$（万元）（此时每个钢厂的产量都满足约束条件）.

比较这两种情况，得最优解为不让钢厂 S_7 生产：

$$\min f = \min(f_1, f_2) = f_1 = 1\ 278\ 632\text{（万元）}$$

具体的购运计划如表 6－3：

表 6－3　问题一的订购和调运方案

	订购量	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_1	800	0	201	133	200	266	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	800	179	11	14	295	0	0	300	0	0	0	0	0	0	0
S_3	1 000	139	11	186	0	0	0	664	0	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_5	1 015	0	358	242	0	0	0	0	0	0	415	0	0	0	0
S_6	1 556	0	0	0	0	0	0	0	0	0	351	86	333	621	165
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

问题二：针对问题一的求解模型，讨论钢厂钢管的销售价格变化对购运计划和总费用影响，及钢厂钢管产量的上限变化对购运计划和总费用的影响.

由于钢厂钢管的销售价格变化和钢厂钢管产量的上限变化对购运计划和总费用造成影响，为了更好地考察影响，下面分别进行讨论.

定义　方案中运往各点 A_i 的运输量的变化量的绝对值之和称为**运输方案变化量.**

1. 讨论钢厂钢管的销售价格变化对购运计划和总费用的影响

当钢厂钢管销售价格变化时，会对购运计划和总费用造成影响. 为了更好地观察每一个钢厂钢管销售价格时所造成的影响，本问题采用比较法. 即：每次只让一个钢厂钢管的销售价格发生相同的变化，其余钢厂钢管的销售价格不发生变化；当每个钢厂钢管的销售价格发生同样的变化 C 时，借助 LINGO 软件包得出相应的总费用，然后进行比较.

分别取 $C = \pm 5$ 及 $C = \pm 1$，利用问题一中的模型，借助 LINGO 软件包得出结果如下（结果与原方案相同的不列入表 6－4 ~ 表 6－7）：

表 6-4 $C=-5$

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 274 632	4 000	211	16
S_2	1 274 632	4 000	226	0
S_3	1 273 632	5 000	1 106	186
S_5	1 271 739	6 893	2 059	752
S_6	1 265 777	12 855	1 910	0

表 6-5 $C=5$

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 282 632	4 000	188	16
S_2	1 282 632	4 000	1 444	2
S_3	1 283 632	5 000	1 557	262
S_5	1 283 792	5 160	2 455	920
S_6	1 284 594	5 963	1 617	752

表 6-6 $C=1$

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 279 432	800	336	18
S_2	1 279 432	800	144	0
S_3	1 279 632	1 000	194	0
S_5	1 279 639	1 007	1 826	32
S_6	1 279 834	1 202	1 394	24

表 6-7 $C=-1$

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 277 832	800	230	16
S_2	1 277 832	800	104	0
S_3	1 277 634	1 000	1 129	10
S_5	1 277 263	1 369	2 113	708
S_6	1 277 068	1 564	1 467	32

从四个表格中,很容易观察出价格变化,S_6 对总费用的影响最大,S_5 对购运计划影响最大.

经过以上讨论,得出以下结论:钢厂钢管销售价格变化时,S_6 对总费用的影响最大,S_5 对购运计划影响最大.

2. 讨论钢厂钢管产量的上限变化对购运计划和总费用的影响

本问题同样采用比较法. 即:每次只改变一个钢厂钢管产量的上限,其余钢厂的钢管产量上

限不发生变化的情况，利用问题一中的模型进行讨论：

1）对产量不受限制的情况计算得到下表：

表 6-8　产量不受限制的情况

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 147 988	130 645	4 258	4 024
S_2	1 252 459	26 174	2 694	972
S_3	1 262 069	16 564	2 203	450

2）对产量下降 100 的情况计算得到下表：

表 6-9　产量下降 100 的情况

钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 288 932	10 300	2 196	300
S_2	1 282 132	3 500	1 416	112
S_3	1 281 132	2 500	1 793	214

3）对产量升高 100 的情况计算得到下表：

表 6-10　产量升高 100 的情况

变化钢厂	总费用	总费用变化量	运输方案变化量	订购方案变化量
S_1	1 268 332	10 300	1 851	200
S_2	1 275 132	3 500	1 661	180
S_3	1 276 132	2 500	1 803	192

从上述表格中，很容易观察出钢厂钢管产量的上限变化时，S_1 对总费用和购运计划影响都最大.

问题三：讨论铁路、公路构成网络的情形.

本题是讨论铺设的管道是树形图，铁路、公路构成网络的情形. 对于这种情形的问题求解过程，以图 6-2 为例进行说明.

1. 铺设管道是树形图时，基本解法原理

为了便于讨论运输路线，先对图 6-2 中的站点、结点给出统一的标号，见图 6-6（标号）. 为求出一般由铁路、公路、管道构成网络情况下的最优购运和最小总费用方案，**首先必须求出各钢厂到各管道结点的最短费用路径**. 由于在途中可能发生**汽车—火车—汽车**的转运方案，而这种情况发生的前提条件是公路（或管道）的两端必须都是火车站点. 由于铁路运输的费用是分段函数，故求各钢厂到各管道结点的最小费用的**具体步骤**如下：

1）首先找出公路的两个端点都是火车站点的结点 $V_1, V_2, \cdots, V_s$；

2）把公路网和铁路网分开，分别组成网络；

3）在铁路网中求出各钢厂 S_i 及各点 V_i 到各火车站点的最短路，并把它转化为最小费用路；

4）在公路网中求出各管道结点到各火车站点的最短路，并把它转化为最小费用路；

5）把前面的结点合并成一个网络，分别求出各钢厂 S_i 到各管道结点 A_j 的最小运输费用路，

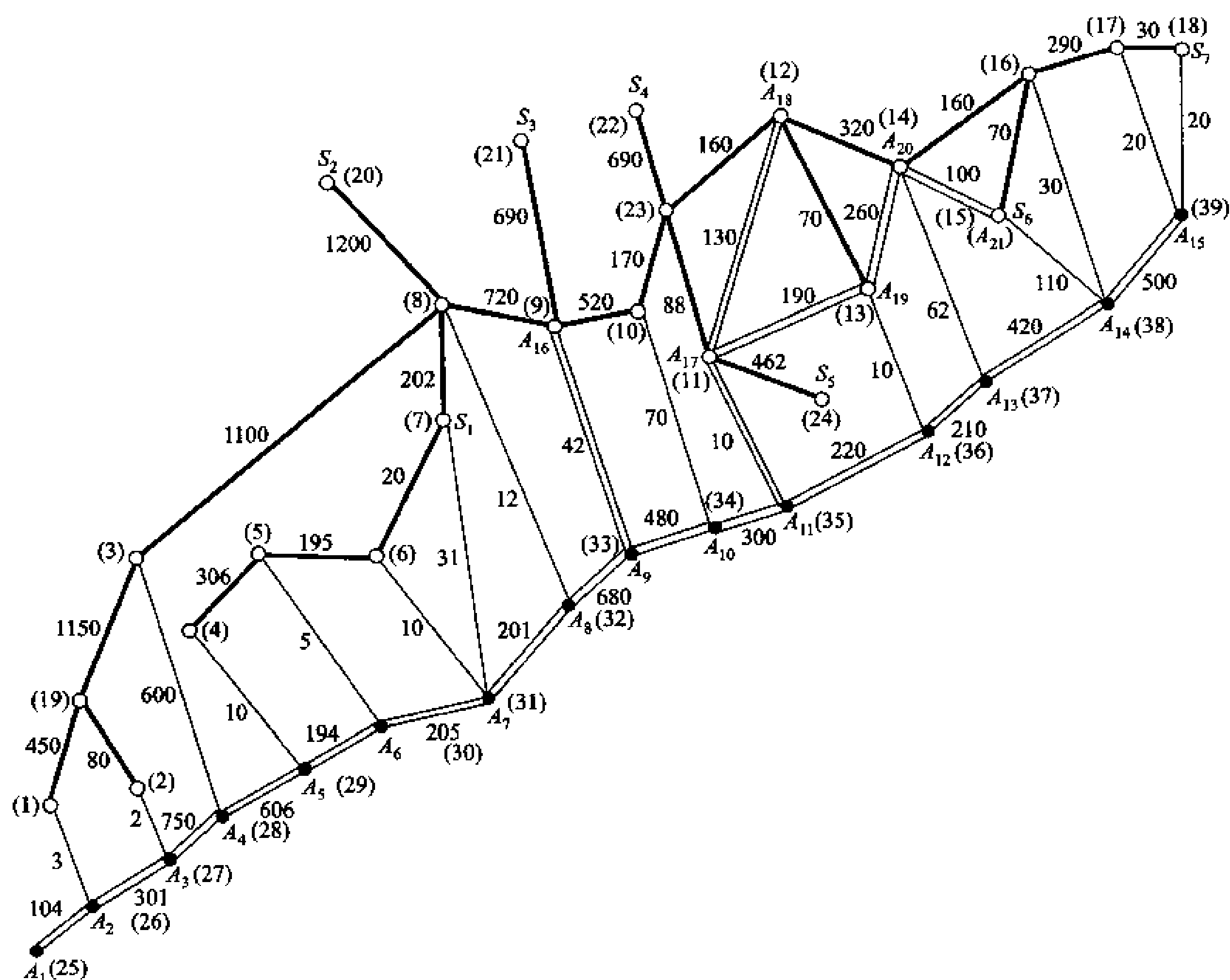


图 6－6

并求出各钢厂 S_i 到各管道结点 A_j 的最小费用 A_{ij}. 由此可得到最小费用为：

表 6－11 S_i 到点 A_j 的最小费用

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_2	320.3	360.3	375.3	410.3	400.3	400.3	425.3
A_3	300.2	345.2	355.2	395.2	380.2	385.2	405.2
A_4	258.6	326.6	336.6	376.6	361.6	366.6	386
A_5	198	266.6	276	316.6	301	306	326
A_6	180.5	250.5	260.5	300.5	285.5	290.5	310.5
A_7	163.1	241	251	291	276	278.1	301
A_8	181.2	226.2	241.2	276.2	266.2	266.2	291.2
A_9	224.2	269.2	203.2	244.2	234.2	234.2	259.2
A_{10}	252	297	237	222	212	211	237
A_{11}	256	301	241	211	188	197	224

续表

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_{12}	266	311	251	221	206	187	216
A_{13}	281.2	326.2	266.2	236.2	226.6	166.2	198.2
A_{14}	288	333	273	243	228	161	186
A_{15}	302	347	287	257	242	178	162
A_{16}	220	265	199	240	230	230	255
A_{17}	255	300	240	210	187	196	223
A_{18}	260	305	245	215	200	183	210
A_{19}	265	310	250	220	205	186	215
A_{20}	275	320	260	230	220	160	192
A_{21}	285	330	270	240	230	150	186

2. 一般模型

设有 m 个钢厂 $S_1, S_2, \cdots, S_m$，以 s_i、p_i 分别表示钢厂 S_i 的生产数量和销售价格. n 个管道结点分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 若 A_i 与 A_j 关联（不妨设 $i<j$），设置变量 $0 \leqslant y_{ij} \leqslant d_{ij}$，其中 d_{ij} 表示结点 A_i 与 A_j 的距离，y_{ij} 表示结点 A_i 与 A_j 的管道铺设过程中，由 A_i 向 A_j 方向应铺设的距离. 若 A_i 与 A_j 不关联，则令 $y_{ij}=0, d_{ij}=0$. 于是运往结点 A_j 处的钢管数量 N_j 为：

$$N_j = \begin{cases} \sum_{k=2}^{n} y_{kj}, & j=1 \\ \sum_{k=1}^{j-1}(d_{kj}-y_{kj}) + \sum_{k=j+1}^{n} y_{kj}, & 2 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \sum_{k=1}^{n-1}(d_{kj}-y_{kj}), & j=n \end{cases}$$

故有

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

钢管总的铺设费用为：

$$\begin{aligned} PS &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{(1+2+\cdots+y_{kj})+(1+2+\cdots+(d_{kj}-y_{kj}))\}\times 0.1 \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{y_{kj}(y_{kj}+1)+(d_{kj}-y_{kj})(d_{kj}+1-y_{kj})}{20}\right\} \end{aligned}$$

成本及运输费用为：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot x_{ij}$$

于是得到问题三的一般非线性规划模型为：

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot x_{ij} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{y_{kj}(y_{kj}+1)+(d_{kj}-y_{kj})(d_{kj}+1-y_{kj})}{20}\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}500 \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant s_i \text{ 或 } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 & i = 1,2,\cdots,m \\ x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_{ij} \leqslant d_{ij} & (i = 1,\cdots,m; j = 2,\cdots,n) \\ N_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & j = 1,2,3,\cdots,n\end{cases}$$

3. 问题三的求解

上述模型中,按图 6-2 取钢厂数 $m=7$,管线结点数 $n=21$,根据相应的关联和距离,就可以对图 6-2 所对应的问题,建立如下的非线性规划模型:

$$\min f = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} A_{ij}\cdot x_{ij} + \sum_{k=1}^{7}\sum_{j=1}^{21}\left\{\frac{y_{kj}(y_{kj}+1)+(d_{kj}-y_{kj})(d_{kj}+1-y_{kj})}{20}\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}500 \leqslant \sum_{j=1}^{21} x_{ij} \leqslant s_i \text{ 或 } \sum_{j=1}^{21} x_{ij} = 0 & i = 1,2,\cdots,7 \\ x_{ij} \geqslant 0, 0 \leqslant y_{ij} \leqslant d_{ij} & (i = 1,\cdots,7; j = 2,\cdots,21) \\ N_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij} & j = 1,2,3,\cdots,21\end{cases}$$

4. 模型求解

由于 LINGO 软件包不能直接处理约束条件:$500 \leqslant \sum_{j=2}^{21} x_{ij} \leqslant s_i$ 或 $\sum_{j=2}^{21} x_{ij}=0$,同问题一中解非线性规划的方法一样,我们可先将此条件改为 $\sum_{j=2}^{21} x_{ij} \leqslant s_i$,用 LINGO 软件包求解后,经分析,发现购运方案中钢厂 S_7 的生产量不足 500 单位,下面我们采用不让钢厂 S_7 生产和要求钢厂 S_7 的产量不小于 500 个单位两种方法分别用 LINGO 软件包求解,得到

1) 不让钢厂 S_7 生产时,计算结果:$f_1=1\ 405\ 611$ (此时每个钢厂的产量都满足条件);

2) 要求钢厂 S_7 的产量不小于 500 个单位时,$f_2=1\ 405\ 197$(此时每个钢厂的产量都满足条件).

比较这两种情况的最优解

$$\min f = \min(f_1, f_2) = f_2 = 1\ 405\ 197(\text{万元})$$

其调运方案和订购方案见表 6-12 和表 6-13.

表 6-12 问题三的调运方案

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_2	0	181	0	0	0	0	0
A_3	0	216	287	0	0	0	0
A_4	371	100	0	0	0	0	0
A_5	0	0	0	0	0	626	0
A_6	165	0	0	0	0	26	0
A_7	265	0	0	0	0	0	0
A_8	0	303	0	0	0	0	0

续表

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_9	0	0	671	0	0	0	0
A_{10}	0	0	0	0	283	0	59
A_{11}	0	0	0	0	375	0	0
A_{12}	0	0	0	0	0	116	0
A_{13}	0	0	0	0	0	393	0
A_{14}	0	0	0	0	0	295	71
A_{15}	0	0	0	0	0	0	370
A_{16}	0	0	42	0	0	0	0
A_{17}	0	0	0	0	145	0	0
A_{18}	0	0	0	0	0	85	0
A_{19}	0	0	0	0	0	100	0
A_{20}	0	0	0	0	0	260	0
A_{21}	0	0	0	0	0	100	0

表 6－13 问题三的订购方案

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
生产量	800	800	1 000	0	802	2 000	500

6.5 习 题

1. 一电路由三个电阻 R_1、R_2、R_3 并联，再与电阻 R_4 串联而成，记 R_k 上电流为 I_k，电压为 V_k，在下列情况下确定 R_k 使电路总功率最小（$k=1,2,3,4$）：

（1）$I_1=4$，$I_2=6$，$I_3=8$，$2\leqslant V_k\leqslant 10$；

（2）$V_1=4$，$V_2=6$，$V_3=8$，$2\leqslant I_k\leqslant 6$.

2. 炼油厂将 A、B、C 三种汽油，一桶原油加工成一桶汽油的费用为 4 元，每天至多能加工汽油 14 000 桶. 原油的买入价、买入量、辛烷值、硫含量，及汽油的卖出价、需求量、辛烷值、硫含量由表 6－14 给出. 如何安排生产计划，使利润最大？

一般来说，做广告可以增加销售，估计一天向一种汽油投入一元广告费，可使该汽油日销量增加 10 桶，且每天最多投入广告费 800 元. 问：如何安排生产和广告计划使利润最大？

表 6－14

原油类别	买入价（元/桶）	买入量（桶/天）	辛烷值（%）	硫含量（%）
A	45	≤5 000	12	0.5
B	35	≤5 000	6	2.0
C	25	≤5 000	8	3.0

续表

汽油类别	卖出价(元/桶)	需求量(桶/天)	辛烷值(%)	硫含量(%)
甲	70	3 000	≥10	≤1.0
乙	60	2 000	≥8	≤2.0
丙	50	1 000	≥6	≤1.0

3. 要设计和发射一个带有 X 射线望远镜和其他科学仪器的气球. 对于性能的粗糙的度量方法是以气球所能到达的高度和所携仪器的重量来表达,很清楚,高度本身是气球体积的一个函数. 根据过去的经验作出的结论,是求极大满意性能函数 $P=f(V,W)=100V-0.3V^2+80W-0.2W^2$,此处 V 是体积,W 是仪器重量. 承包项目的预算限额为 1 040 美元,与体积 V 有关的费用是 $2V$,和设备有关的费用是 $4W$,为了保证在高度方面的性能与科学设备方面的性能之间合理平衡,设计者要满足约束条件 $80W\geqslant100V$. 找出由体积和设备重量来表达的最优设计,并用线性化方法求解.

4. 某厂向用户提供发动机,合同规定,第一、二、三季度末分别交货 40 台、60 台、80 台. 每季度的生产费用为 $f(x)=ax+bx^2$(元),其中 x 是该季生产的发动机台数. 若交货后有剩余,可用于下季度交货,但需支付存储费,每台每季度 c 元. 已知工厂每季度最大生产能力为 100 台,第一季度开始时无存货,设 $a=50,b=0.2,c=4$,问工厂应如何安排生产计划,才能既满足合同又使总费用最低? 讨论 a、b、c 变化对计划的影响,并作出合理的解释.

5. 钢管下料问题 某钢管零售商从钢管厂进货,将钢管按照顾客的要求切割出售. 从钢管厂进货得到的原材料钢管的长度都是 1 850 mm,现在一顾客需要 15 根 290 mm、28 根 315 mm、21 根 350 mm 和 30 根 455 mm 的钢管. 为了简化生产过程,规定所使用的切割模式的种类不能超过 4 种,使用频率最高的一种切割模式按照一根钢管价值$\frac{1}{10}$增加费用,使用频率次之的切割模式按照一根原料钢管价值的$\frac{2}{10}$增加费用,以此类推,且每种切割模式下的切割次数不能太多(一根原钢管最多生产 5 根产品),此外,为了减少余料浪费. 每种切割模式下的余料浪费不能超过 100 mm,为了使总费用最小,应该如何下料?

第 7 章　动 态 规 划

动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种数学方法.动态规划在工程技术、管理、经济、工业生产、军事及现代控制工程等方面都有广泛的应用,而且由于动态规划方法有其独特之处,在解决某些实际问题时,显得更加方便有效.

由于决策过程的时间参数有离散的和连续的情况,故决策过程分为离散决策过程和连续决策过程.本部分内容主要介绍离散决策过程,通过几个类型的问题来说明用动态规划处理问题的方法,但所建立的概念、理论和方法,具有相当的重要性.

7.1　动态规划的基本方法

7.1.1　多阶段决策过程及实例

在生产和科学实验中一类活动的过程,由于它的特殊性,可将其分为若干个互相联系的阶段,在它的每一个阶段都需要作出决策,从而使整个过程达到最好的活动效果.因此,各个阶段决策的选取不是任意确定的,它依赖于当前面临的状态,又给以后的发展施以影响.当各个阶段决策确定后,就组成了一个决策序列,因而也就决定了整个过程的一条活动路线,这样一个前后关联具有链状结构的多阶段过程就称为多阶段决策过程,也称序贯决策过程.

在多阶段决策问题中,各个阶段采取的决策一般来说是与时间有关的,决策依赖于当前的状态,而又随即引起状态的转移,一个决策序列就是在状态的运动变化中产生的,故有"动态"的含义.因此,把处理它的方法称为**动态规划方法**.但有一些与时间没有关系的静态规划问题,只要人为地引进"时间"因素,也可把它视为多阶段决策问题,从而用动态规划方法去处理.

例 1(最短路线问题)　如图 7-1 所示,给出一个线路网络,A 为始点,G 为终点,两点之间的连线可以表示道路、管道等,连线上的数字表示两点间的距离(或费用).试选择一条由 A 到 G

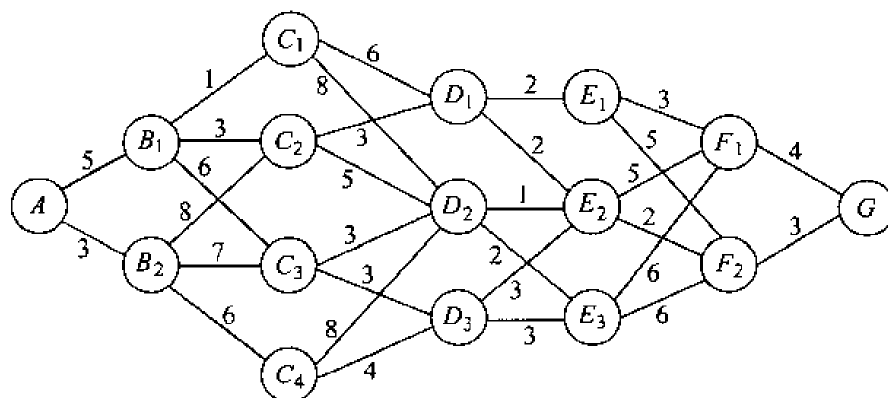


图 7-1

的线路,使总距离(或费用)为最小.

例 2(生产－存贮问题) 某工厂根据市场调研情况,需制定今后四个月的生产计划,据估计,在这四个月内,市场对该产品需求量如下表所示.

月份(k)	1	2	3	4
需求量(D_k)	2	3	2	4

假定生产每批产品的固定成本费用为 3 千元,每单位产品生产成本费用为 1 千元,库存费用为每月 0.5 千元. 并且规定 1 月初和 4 月末均无产品库存,试求该厂如何安排各个月的生产与库存,使总成本费用最小.

此外,各种资源(人力、物力)分配问题、背包问题、购货问题、水库调度问题等等,也都具有多阶段决策问题的特性.

7.1.2 动态规划的基本概念和基本方程

上面列举的最短路线问题是动态规划中一个较为直观的典型例子. 我们通过讨论它的解法来说明动态规划方法的基本思想,并阐述它的基本概念.

如图 7－1 所示的线路网络,明显地,从 A 点到 G 点可分为 6 个阶段. 从 A 到 B 为第一阶段,从 B 到 C 为第二阶段,…,从 F 到 G 为第六阶段. 在第一阶段中,A 为起点,终点有 B_1、B_2 两个,因而这时走的路线有两种选择,若我们选择走到 B_2 的决策,则 B_2 就是我们选择的决策结果. 在第二阶段,从 B_2 出发,对应于 B_2 有一个可供选择的终点集合 $\{C_2, C_3, C_4\}$,若选择 B_2 到 C_2 为第二阶段的决策,则 C_2 就是第二阶段的终点,同时又是第三阶段的始点. 类似地递推下去,我们看到各个阶段的决策不同所走的路线就不同,因而整个路线的长短也不同. 问题的要求是在各个阶段选取一个恰当的决策,使由这些决策所决定的一条路线,其总路程最短.

若我们采取穷举法. 即把由 A 到 G 共有 $2\times3\times2\times2\times2\times1=48$ 条不同的路线都算出来,比较 48 条不同路线的最短距离,最短距离为 18,找出相应的最短路线为

$$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$$

1. 动态规划的基本概念

(1)阶段

把所给问题的过程,恰当地划分为若干个相互联系的阶段,以便于求解. 通常用 k 表示阶段变量. 如例 1 可分为 6 个阶段来求解.

(2)状态

状态表示在任一阶段所处的位置. 通常一个阶段有若干个状态. 描述状态的变量称为状态变量. 参数 s_k 表示第 k 阶段的状态变量. 如在例 1 中第三阶段有四个状态,则状态变量 s_3 可取四个值,即 C_1, C_2, C_3, C_4,点集合 $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ 就称为第三阶段的可能状态集合,记为 $s_3=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

(3)决策

在某一阶段,当状态给定后,往往可以作出不同的决定,从而确定下一阶段的状态,这种决定称为决策. 描述决策的变量称为决策变量,用 $x_k(s_k)$ 表示第 k 阶段当状态为 s_k 时的决策变量,它

是状态 s_k 的函数. 决策变量的变化范围称为允许决策集合. 通常以 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段状态为 s_k 时的允许决策集合. 显然有 $x_k(s_k) \in D_k(s_k)$.

(4)状态转移方程

状态转移方程描述由一个状态到另一个状态的演变过程. 用

$$s_{k+1} = T(s_k, x_k)$$

表示,它表示第 k 阶段与第 $k+1$ 阶段状态的变换规律. 如在例 1 第二阶段中,若从状态 B_1 出发,就可作出三种不同的决策,其允许决策集合

$$D_2(B_1) = \{C_1, C_2, C_3\}$$

若选取的点为 C_2,则 C_2 是状态 B_1 在决策 $x_2(B_1)$ 作用下的一个新的状态,记作 $C_2 = x_2(B_1)$.

(5)策略

由过程的第 k 阶段开始到终点为止的过程,称为问题的后部子过程,由每段的决策组成的决策函数序列 $\{x_k(s_k), x_{k+1}(s_{k+1}), \cdots, x_n(s_n)\}$ 就称为子过程的策略,简称子策略,记为 $P_{k,n}(s_k)$:

$$P_{k,n}(s_k) = \{x_k(s_k), x_{k+1}(s_{k+1}), \cdots, x_n(s_n)\}$$

当 $k=1$ 时,则此决策函数序列称为全过程的一个策略,简称策略,记为 $P_{1,n}(s_1)$.

在实际问题中,由于每个阶段都有若干个状态,针对每一个状态又有多种不同的决策,从而组成了不同的决策函数序列,即存在许多策略可供选择. 这种可供选择的策略范围,称为允许策略集合,用 P 表示. 从允许策略集合中找出使问题达到最优效果的策略称为最优策略.

(6)指标函数和最优指标函数值

指标函数(又称目标函数)是用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标,它是定义在过程上的数量函数,用 $V_{k,n}$ 表示:

$$V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, x_k, s_{k+1}, x_{k+1}, \cdots, s_{n+1}), \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

当初始状态给定时,过程的策略就确定了,因而指标函数也就确定,故指标函数是初始状态和策略的函数,即

$$V_{k,n} = V_{k,n}[s_k, P_{k,n}(s_k)]$$

阶段指标(又称阶段效益)是衡量该段决策效果的数量指标,用 $v_k(s_k, x_k)$ 表示在第 k 阶段由状态 s_k 和决策 $x_k(s_k)$ 所得的效益.

指标函数 $V_{k,n}$ 的最优值,称为最优指标函数值,记为 $f_k(s_k)$,它表示从第 k 阶段由状态 s_k 出发到过程结束时所获得的最优指标函数值.

在不同的问题中,指标的含义是不同的,可能是距离、利润、资源消耗等. 如在最短路线问题中,$V_{k,n}$ 表示从第 k 阶段的点 s_k 至终点 G 的距离;$f_k(s_k)$ 表示由点 s_k 到 G 的最短距离,用 $d_k(s_k, x_k)$ 表示在第 k 阶段由点 s_k 到点 $s_{k+1} = x_k(s_k)$ 的距离. 如在第五阶段中由点 E_1 到 F_1 的距离为 3 就记为 $d_5(E_1, F_1) = 3$.

2. 动态规划的基本思想和基本方程

现在,我们结合解决最短路线问题来介绍动态规划方法的基本思想. 最短路线有一个重要特性,即如果从起点到终点的最短路线在第 k 站通过点 P_k,则由点 P_k 出发到达终点的所有可能选择的不同路线来说,必定也是最短的.

最短路线的这一特性,启发我们找最短路线的方法,那就是从最后一段开始,由后向前逐步递推,求出各点到 G 点的最短路线,最后就求得由 A 点到 G 点的最短路线. 所以动态规划的方法

是从终点逐段向始点寻找最短路线的一种方法.

下面我们按照动态规划的方法,将例 1 从最后一段开始计算,由后向前逐步推移至 A 点.

当 $k=6$ 时,由 F_1 到终点 G 只有一条路线,故 $f_6(F_1)=4$,同理,$f_6(F_2)=3$.

当 $k=5$ 时,出发点有 E_1,E_2,E_3 三个. 若从 E_1 出发,则有两个选择,一是至 F_1,一是至 F_2,所以

$$f_5(E_1)=\min\begin{Bmatrix}d_5(E_1,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_1,F_2)+f_6(F_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+4\\5+3\end{Bmatrix}=7$$

这说明,其最短路线是 $E_1\to F_1\to G$,而相应的决策为 $x_5(E_1)=F_1$.

同理,从 E_2 和 E_3 出发,则有

$$f_5(E_2)=\min\begin{Bmatrix}d_5(E_2,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_2,F_2)+f_6(F_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+4\\2+3\end{Bmatrix}=5$$

其最短路线是 $E_2\to F_2\to G$,且 $x_5(E_2)=F_2$.

$$f_5(E_3)=\min\begin{Bmatrix}d_5(E_3,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_3,F_2)+f_6(F_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}6+4\\6+3\end{Bmatrix}=9$$

其最短路线是 $E_3\to F_2\to G$,且 $x_5(E_3)=F_2$.

完全类似地,可算得如下结果.

当 $k=4$ 时,有

$$f_4(D_1)=7,x_4(D_1)=E_2$$
$$f_4(D_2)=6,x_4(D_2)=E_2$$
$$f_4(D_3)=8,x_4(D_3)=E_3$$

当 $k=3$ 时,有

$$f_3(C_1)=13,x_3(C_1)=D_1$$
$$f_3(C_2)=10,x_3(C_2)=D_1$$
$$f_3(C_3)=9,\ x_3(C_3)=D_2$$
$$f_3(C_4)=12,x_3(C_4)=D_3$$

当 $k=2$ 时,有

$$f(B_1)=13,\quad x_2(B_1)=C_2$$
$$f_2(B_2)=16,\quad x_2(B_2)=C_3$$

当 $k=1$ 时,出发点只有一个 A 点,则

$$f_1(A)=18,\quad x_1(A)=B_1$$

至此,求得图 7-1 的最短路线为 $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E_2\to F_2\to G$,相应的最短路为 18.

再按计算顺序反推之,可得最优决策函数序列 $\{x_k\}$,即由

$$x_1(A)=B_1,x_2(B_1)=C_2,x_3(C_2)=D_1,x_4(D_1)=E_2,x_5(E_2)=F_2,x_6(F_2)=G$$

组成一个最优策略.

从最短路线问题例子的计算过程中,我们可以看到,用动态规划方法求解问题的关键,在于正确地写出 k 阶段与 $k+1$ 阶段之间的递推关系式:

$$f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k(s_k)} \{d_k(s_k, x_k(s_k)) + f_{k+1}(x_k(s_k))\}, \quad k = 6,5,4,3,2,1$$

和边界条件$f_7(s_7) = 0$(或写成$f_6(s_6) = d_6(s_6, G)$).

一般地,k 阶段与 $k+1$ 阶段的递推关系式可写为

$$f_k(s_k) = \operatorname*{opt}_{x_k \in D_k(s_k)} \{d_k(s_k, x_k(s_k)) + f_{k+1}(x_k(s_k))\}, \quad k = n, n-1, \cdots, 2, 1$$

边界条件为$f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$,其中"opt"是 optimization(最优化)的缩写,可根据题意选取 min 或 max. 这种递推关系式称为动态规划的函数基本方程.

7.2 最优化原理与最优性定理

20 世纪 50 年代,R. Bellman 等人根据研究一类多阶段决策问题,提出了"最优化原理"作为动态规划的理论基础. 长期以来,人们一直沿用这一提法. 动态规划原理的内容是,"作为整个过程的最优策略具有这样的性质:即无论过去的状态和决策如何,对前面的决策所形成的状态而言,余下的诸决策必须构成最优策略."

后来,随着人们深入地研究动态规划,认为动态规划基本方程在动态规划理论中具有更为基础的作用. 反映动态规划基本方程的最优性定理是策略最优性的充要条件,而最优化原理是策略最优性的必要条件,它仅是最优性定理的推论而已.

最优性定理 设阶段数为 n 的多阶段决策过程,其阶段编号为 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 允许策略 $P_{0,n-1}^* = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{n-1}^*)$是最优策略的充要条件是对任意一个 $k(0 < k < n-1)$和初始状态 $s_0 \in S_0$,有

$$V_{0,n-1}(s_0, P_{0,n-1}^*) = \operatorname*{opt}_{P_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(s_0)} \{V_{0,k-1}(s_0, P_{0,k-1}) + \operatorname*{opt}_{P_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(s_0)} V_{k,n}(\bar{s}_k, P_{k,n-1})\}$$

其中,$P_{0,n-1} = (P_{0,k-1}, P_{k,n-1})$,$\bar{s}_k = T_{k-1}(s_{k-1}, x_{k-1})$是由初始状态 s_0 和子策略 $P_{0,k-1}$所确定的 k 阶段状态,$T_{k-1}(s_{k-1}, x_{k-1})$是状态转移方程.

推论 若允许策略 $P_{0,n-1}^*$是最优策略,则对任意的 $k(0 < k < n-1)$,它的子策略 $P_{k,n-1}^*$对于以 $s_k^* = T_{k-1}(s_{k-1}^*, x_{k-1}^*)$为起点的 k 到 $n-1$ 子过程来说,必是最优策略(注意:k 段状态 s_k^* 是由 s_0 和 $P_{0,k-1}^*$所确定的).

此推论就是最优化原理所谈的内容. 关于定理和推论的证明从略.

7.3 构成动态规划模型的条件

把一个实际问题化为能用动态规划的方法来求解,首先要做的是根据题意把它构造成动态规划的数学模型. 构造动态规划模型的步骤为:

一、将实际问题恰当地划分为若干个阶段,一般是根据时间和空间的自然特征而划分,但要便于能把问题的过程转化成多阶段决策的过程.

二、正确地选择状态变量 s_k,使它既能描述过程的演变特征,又要满足无后效性(马尔可夫性). 所谓"无后效性"是指:如果某段状态给定,则在这段以后过程的发展只与当前的状态有关,而与过去的历史无关. 若选择状态变量不满足无后效性的要求,则就不能唯一确定下段的状态及其最优指标函数.

三、确定决策变量 x_k 及每段的允许决策集合 $D_k(s_k)=\{x_k\}$.

四、正确写出状态转移方程 $s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$.

五、正确列出指标函数关系 $V_{k,n}$，并要求满足递推性.

正确的指标函数关系要满足三点：

1. 它是定义在过程上的数量函数；
2. 要有可分离性并满足递推关系，即 $V_{k,n}$ 可以表示为 $s_k,x_k,V_{k+1,n}$ 的函数，记为

$$V_{k,n}(s_k,x_k,s_{k+1},\cdots,s_{n+1})=\psi_k[s_k,x_k,V_{k+1,n}(s_{k+1},\cdots,s_{n+1})]$$

3. $\psi_k[s_k,x_k,V_{k+1,n}]$ 对其变元 $V_{k+1,n},s_k,x_k$ 来说严格单调.

常见的指标函数是取各段指标和的形式，即

$$V_{k,n}=\sum_{i=k}^{n}v_i(s_i,x_i)$$

其中 $v_i(s_i,x_i)$ 为第 i 段的指标，它显然是满足上述三点，故上式可写成

$$V_{k,n}=v_k(s_k,x_k)+V_{k+1,n}[s_{k+1},\cdots,s_{n+1}]$$

由于指标函数是初始状态和策略的函数，因而上式又可写成

$$V_{k,n}[s_k,P_{k,n}(s_k)]=v_k(s_k,x_k)+V_{k+1,n}[s_{k+1},P_{k+1,n}]$$

所以，最优指标函数值为

$$f_k(s_k)=\underset{P_{k,n}}{\text{opt}}\ V_{k,n}[s_k,P_{k,n}(s_k)]=V_{k,n}[s_k,P^*_{k,n}(s_k)]$$

其中，$P^*_{k,n}(s_k)$ 表示初始状态为 s_k 时的后部子过程所有子策略中的最优子策略.

7.4　动态规划的递推方法

在上节已看到，动态规划方法的关键在于正确写出动态规划的递推关系式，而动态规划的递推方式有逆推和顺推两种形式. 一般地，当初始状态给定时，用逆推比较方便，当终止状态给定时，用顺推比较方便.

7.4.1　逆推解法

设已知初始状态 s_1，并假定最优值函数 $f_k(s)$ 是以 s 为初始状态，从 k 阶段到 n 阶段所得到的最大效益.

首先从第 n 阶段开始，对任意输入参数 s_n，则此阶段的最大效益为

$$f_n(s_n)=\max_{x_n\in D_n(s_n)}v_n(s_n,x_n)$$

这里 $D_n(s_n)$ 是由状态 s_n 所确定的第 n 阶段的允许决策集合. 解此一维极值问题，得到最优值 $f_n(s_n)$ 及最优解 $x_n=x_n(s_n)$，它就是当第 n 阶段的初始状态为 s_n 时的最优决策.

然后，进入第 $n-1$ 阶段，则最大效益为

$$f_{n-1}(s_{n-1})=\max_{x_{n-1}\in D_{n-1}(s_{n-1})}[v_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})+f_n(s_n)]$$

其中 $s_n=T_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})$. 解此一维极值问题，得到最优解 $x_{n-1}=x_{n-1}(s_{n-1})$，这就是当第 $n-1$ 阶段的输入为 s_{n-1} 时的最优决策.

如此类推，直到第一阶段，得到最大效益为

$$f_1(s_1)=\max_{x_1\in D_1(s_1)}[v_1(s_1,x_1)+f_2(s_2)]$$

其中 $s_2=T_1(s_1,x_1)$，解之，得到最优解 $x_1=x_1(s_1)$.

在上述逆推过程中，我们逐步求出了极值函数 $f_n(s_n),f_{n-1}(s_{n-1}),\cdots,f_1(s_1)$ 及相应的决策函数 $x_n(s_n),x_{n-1}(s_{n-1}),\cdots,x_1(s_1)$. 由于初始状态 s_1 是已知的，按照上述递推过程相反的顺序推算，就可逐步确定出每一阶段的决策及效益.

综上所述，整个过程包括两个步骤，前一步骤称为"迭代"或"递推"，后一步骤称为"回代".

例1 求 x_1,x_2,x_3 在满足约束条件

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=c\ (c>0)\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

之下，使函数 $F(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ 达到最大值.

这个例子可用初等方法或微分学方法求出它的最优解，现在用动态规划方法来求解. 按变量划分阶段，可把它看作一个三阶段决策问题，决策变量分别为 x_1,x_2,x_3. 设初始状态 $s_1=c$，状态转移函数为 $s_{k+1}=s_k-x_k(k=1,2,3)$，各阶段的效益 $v_k(s_k,x_k)$ 按乘法结合起来. 设 $s_3=x_3,s_3=s_2-x_2,s_2=s_1-x_1$. 因此从最后一阶段开始，依次列出极值函数的递推关系为

$$f_3(s_3)=\max_{x_3=s_3}(x_3)$$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[x_2f_3(s_3)]=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[x_2f_3(s_2-x_2)]$$

$$f_1(s_1)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}[x_1f_2(s_2)]=\max_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}[x_1f_2(s_1-x_1)]$$

然后，可逐步求出各阶段的最优值及最优解. 显然有

$$f_3(s_3)=s_3\quad 及最优解\quad x_3=s_3$$

接着可求出（如用微分法）

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[x_2(s_2-x_2)]=\left(\frac{s_2}{2}\right)^2\quad 及最优解\quad x_2=\frac{s_2}{2}$$

$$f_1(s_1)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}\left[x_1\left(\frac{s_1-x_1}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{s_1}{3}\right)^2\quad 及最优解\quad x_1=\frac{s_1}{3}$$

由于已知初始状态 $s_1=c$，进行回代运算，得

$$s_1=c,\qquad x_1^*=\frac{c}{3},\qquad f_1(s_1)=\left(\frac{c}{3}\right)^3$$

$$s_2=s_1-x_1^*=c-\frac{c}{3}=\frac{2}{3}c,\qquad x_2^*=\frac{s_2}{2}=\frac{c}{3},\qquad f_2(s_3)=\left(\frac{c}{3}\right)^2$$

$$s_3=s_2-x_2^*=\frac{2}{3}c-\frac{c}{3}=\frac{c}{3},\qquad x_3^*=s_3=\frac{c}{3},\qquad f_3(s_3)=\frac{c}{3}$$

由此得到最优策略 $x_1^*=x_2^*=x_3^*=\frac{c}{3}$，最大值 $f_1(s_1)=\left(\frac{c}{3}\right)^3$.

上述递推过程为求极值问题提供了一条新的途径，把 n 维极值问题化为 n 个前后关联的一维极值问题，这正是动态规划方法的基本特征.

7.4.2 顺推解法

设已知终止状态 s_{n+1}，并假定最优值函数 $f_k(s)$ 是以 s 为 k 阶段的结束状态，从1阶段到 k 阶

段所得到的最大效益.

已知终止状态用顺推方法与已知初始状态用逆推方法本质上是没有区别的,假定状态变换 $s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$ 的逆变换为 $s_k=T_k^*(s_{k+1},x_k)$.

首先,从第一阶段开始,求出

$$f_1(s_2)=\max_{x_1\in D_1(s_1)} v_1(s_1,x_1)$$

其中 $s_1=T_1^*(s_2,x_1)$ 及相应的最优解 $x_1=x_1(s_2)$.

然后进入第二阶段,求出

$$f_2(s_3)=\max_{x_2\in D_2(s_2)}[v_2(s_2,x_2)+f_1(s_2)]$$

其中 $s_2=T_2^*(s_3,x_2)$ 及相应的最优解 $x_2=x_2(s_3)$. 如此类推,直到求出

$$f_n(s_{n+1})=\max_{x_n\in D_n(s_n)}[v_n(s_n,x_n)+f_{n-1}(s_n)]$$

其中 $s_n=T_n^*(s_{n+1},x_n)$ 及相应的最优解 $x_n=x_n(s_{n+1})$.

由于终止状态 s_{n+1} 是已知的,所以回代过程从 s_{n+1} 开始,按上述过程相反的顺序,就可以逐步确定出每阶段的决策及效益,从而得到整个问题的最优策略.

例 2 将本节例 1 用顺推法解之.

这里仍按变量划分为三个阶段,其决策变量分别为 x_1,x_2,x_3,并假设初始状态 $s_1=c$,但状态转移函数应为 $s_{k+1}=s_k-x_k$ 的逆变换

$$s_k=s_{k+1}+x_k \quad (k=1,2,3)$$

为保证决策变量非负,必有 $s_{k+1}\leqslant s_k\leqslant c$.

在第一阶段,因 $s_1=s_2+x_1=c$,故有

$$x_1=c-s_2,\quad f_1(s_2)=x_1=c-s_2$$

在第二阶段,因 $s_2=s_3+x_2$ 和 $s_2\leqslant c$. 故可求出

$$f_2(s_3)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant c-s_3}[x_2f_1(s_2)]=\max_{0\leqslant x_2\leqslant c-s_3}[x_2(c-s_3-x_2)]=\left(\frac{c-s_3}{2}\right)^2$$

相应的最优解为 $x_2=\dfrac{c-s_3}{2}$.

在第三阶段,因 $s_3=s_4+x_3$ 和 $s_3\leqslant c$,故可求出

$$f_3(s_4)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant c-s_4}[x_3f_2(s_3)]=\max_{0\leqslant x_3\leqslant c-s_4}\left[x_3\left(\frac{c-s_4-x_3}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{c-s_4}{3}\right)^3$$

相应的最优解为 $x_3=\dfrac{c-s_4}{3}$.

终止状态 s_4 由下面的极值问题来确定

$$\max_{0\leqslant s_4\leqslant c} f_3(s_4)=\max\left(\frac{c-s_4}{3}\right)^3$$

显然当 $s_4=0$ 时,$f_3(s_4)$ 才能达到最大值,然后再进行回代,得到

$$s_4=0,\quad x_3=\frac{c}{3},\quad f_3(s_4)=\left(\frac{c}{3}\right)^3$$

$$s_3=\frac{c}{3},\quad x_2=\frac{c}{3},\quad f_2(s_3)=\left(\frac{c}{3}\right)^2$$

$$s_2 = \frac{2c}{3}, \quad x_1 = \frac{c}{3}, \quad f_1(s_2) = \frac{c}{3}$$

通过上面的讨论,对如何恰当地运用动态规划中的逆推和顺推方法有了比较明确的了解.当初始状态和终止状态都已知时,顺推和逆推都可以进行,应视具体情况而定.

通过此例的计算对我们用动态规划的方法去解某些非线性规划问题的思路是有启发的.

7.5 动态规划模型举例

7.5.1 一种资源的分配问题

设有某种原料,总数量为 a,用于生产 n 种产品.若分配数量 x_i 用于生产第 i 种产品,其收益为 $g_i(x_i)$.问应如何分配,才能使生产的总收入最大?

此问题可写成静态规划问题:

$$\max[g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_n(x_n)]$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

在应用动态规划方法来处理这类"静态规划"问题时,通常以把资源分配给一个或几个使用者的过程作为一个阶段,把规划问题中的变量取为决策变量,将累计的量或随递推过程变化的量选为状态变量.

状态变量 s_k 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的原料数量.

决策变量 x_k 表示分配给生产第 k 种产品的原料数量.

状态转移方程为:$s_{k+1} = s_k - x_k$.

允许决策集合为:$D_k(s_k) = \{x_k | 0 \leqslant x_k \leqslant s_k\}$.

令 $f_k(s_k)$ 表示以数量为 s_k 的原料分配给第 k 种至第 n 种产品所得到的最大收入.因而可写出动态规划的递推关系式为:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 1,2,\cdots,n-1 \\ f_n(s_n) = g_n(x_n) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)\}, \quad k = 1,2,\cdots,n-1 \\ f_n(s_n) = g_n(x_n) \end{cases}$$

利用这个递推关系式求问题的解 $f_1(a)$.

7.5.2 考虑畜牧领域的资源分配问题

假设我们有一群年龄等级为 $i(i=0,1,2,\cdots,n)$,头数为 s_i 的牲畜,其中年龄等级 $i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的牲畜头数是包括年龄为 i 的所有牲畜数,年龄等级 n 的牲畜头数是包括年龄为 n 或比 n 大的所有牲畜数.于是在每年的开始推断下述决策和相应的收益:

(1) 牲畜可以送到市场且每一头年龄等级 i 的牲畜的价值为 a_i;

(2) 牲畜可以继续饲养,其中年龄等级 i 的牲畜,s_i 头可生产 $b_i s_i$ 头小牲畜.

假设 $c_i s_i$ 是年龄等级 i 继续生存到年龄 $i+1$ 的牲畜头数,$0 \leqslant c_i \leqslant 1$.

如果最初牲畜群的年龄等级为 i,头数为 d_i,$i=1,2,\cdots,n$,确定在 N 年范围内使总收益最大的饲养和市场策略.

解 把函数 $f(s_0,s_1,\cdots,s_n,k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$ 定义为从第 k 年开始,具有年龄等级 i $(i=1,2,\cdots,n)$,牲畜量为 s_i 的最优饲养和市场策略过程的收益,设 x_i 为在第 k 年,年龄等级为 i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的牲畜送往市场的头数. 然后,从这些分配中,我们立即得到收益为:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

下一年(第 $k+1$ 年)新增畜收群的组合为下表所示:

表 7-1 在第 k 年新生牲畜群的组合

i	年龄为 i 的牲畜
0	$\sum_{i=0}^{n} b_i(s_i - x_i)$
1	$c_0(s_0 - x_0)$
2	$c_1(s_1 - x_1)$
⋮	⋮
$n-1$	$c_{n-2}(s_{n-2} - x_{n-2})$
$\geqslant n$	$c_{n-1}(s_{n-1} - x_{n-1}) + c_n(s_n - x_n)$

故有

$$f(s_0,s_1,\cdots,s_n,k) = \max_{\substack{0 \leqslant x_i \leqslant s_i \\ i=1,2,\cdots,n}} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x_i + f\left[\sum_{i=0}^{n} b_i(s_i - x_i), c_0(s_0 - x_0), c_1(s_1 - x_1), \cdots, c_{n-1}(s_{n-1} - x_{n-1}) + c_n(s_n - x_n), k+1 \right] \right\}$$

显然,对最后一年($k=N$),我们卖出所有牲畜并得到收益为:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s_i$$

这将给出:

$$f(s_0,s_1,\cdots,s_n,N) = \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$$

在这里我们可以应用递推方程得到 $f(d_0,d_1,\cdots,d_n,1)$,即是我们要求的最大收益. 再用寻找最优决策序列的方法可以确定饲养策略.

7.6 习 题

1. 用递推方法求解下列问题

$$\max z = x_1 x_2^2 x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

2. 某厂生产一种产品,估计该产品在未来四个月的销售量分别为4,5,3,2(单位:百件). 该项产品的生产准备费用每批为500元,每件的生产费用为1元,存储费用每件每月为1元,假定一月初的存货为100件,五月初的存货为零. 试求该厂在这四个月内的最优生产计划.

第8章 微分方程

微分方程是研究函数变化规律的有力工具,在科技、工程、经济管理、生态、环境、人口、交通等各个领域中有着广泛的应用.

建立微分方程模型要对研究对象作具体分析.一般有以下三种方法:一是根据规律建模;二是用微元法建模;三是用模拟近似法建模.

建立微分方程模型只是解决问题的第一步,通常需要求出方程的解来说明实际现象,并加以检验.如果能得到解析形式的解固然是便于分析和应用的,但大多数微分方程是求不出解析解的,因此研究其稳定性和数值解法就是十分重要的手段.

8.1 微分方程模型

8.1.1 根据规律建模类根型

在数学、力学、物理、化学等学科中已有许多经过实践检验的规律和定律,如牛顿运动定律、基尔霍夫电流及电压定律、物质的放射性规律、曲线的切线的性质等,这些都涉及某些函数的变化率.我们就可以根据相应的规律,列出常微分方程.

例1 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成正比,如果物体在20 min内由100℃冷却到60 ℃,那么经过多长时间此物体的温度将达到30 ℃?

解 牛顿的冷却定律是:将温度为T的物体放入处于常温T_0的介质中时,T的变化速率正比于T与周围介质的温度差.

由题意知

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),\quad T(0)=100,\quad T\left(\frac{1}{3}\right)=60$$

微分方程的解为$T=Ce^{-kt}+20$,可求出$T=80\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}+20$,$t=1$,即经过1 h温度可以降到30 ℃.

例2(目标跟踪问题) 设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点$A(1,0)$处的乙舰发射导弹,导弹始终对准乙舰.如果乙舰以最大的速度v_0(v_0是常数)沿平行于y轴的直线行驶,导弹的速度是$5v_0$,求导弹运行的曲线.又乙舰行驶多远时,导弹将它击中?

解 设导弹的轨迹曲线为$y=y(x)$,并设经过时间t,导弹位于点$P(x,y)$,乙舰位于点$Q(1,v_0t)$.由于导弹头始终对准乙舰,故此时直线PQ就是导弹的轨迹曲线弧OP在点P处的切线,即有$y'=\frac{v_0t-y}{1-x}$,亦即

$$v_0t=(1-x)y'+y$$

又根据题意,弧OP的长度为$|AQ|$的5倍,即

$$\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 5v_0 t$$

由此得

$$(1-x)y' + y = \frac{1}{5}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

整理得

$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{1+y'^2}$$

并有初值条件 $y(0)=0, y'(0)=0$，解得

$$y = -\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

此即导弹运行的曲线方程(图 8－1).

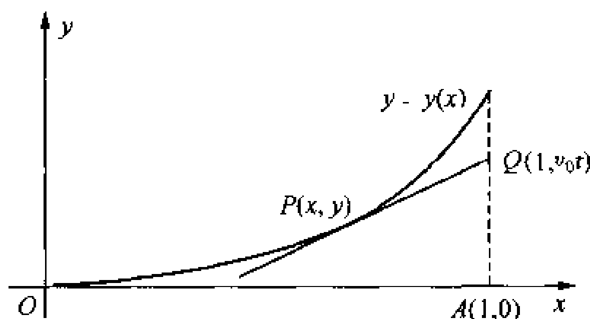


图 8－1

当 $x=1$ 时 $y=\frac{5}{24}$，即当乙舰航行到点 $\left(1,\frac{5}{24}\right)$ 处时被导弹击中. 被击中时间为 $t=\frac{y}{v_0}=\frac{5}{24v_0}$. 若 $v_0=1$，则在 $t=0.21$ 时被击中.

8.1.2　微元法建模

用微积分的微元分析法建立常微分方程模型，实际上是寻求一些微元之间的关系式. 在建立这些关系式时也要用到已知的规律或定理. 与第一种方法不同之处在于这里不是直接对未知函数及其导数应用规律和定理来求关系式，而是对某些微元来应用规律.

例 3(容器漏水问题)　有高为 1 m 的半球形容器，水从它的底部小孔流出. 小孔横截面积为 1 cm^2. 开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中容器里水面的高度 h(水面与孔口中心的距离)随时间 t 变化的规律.

解　由流体力学知识知道，水从孔口流出的流量 Q(即通过孔口横截面的水的体积 V 对时间 t 的变化率)可用下列公式

$$Q = \frac{dV}{dt} = 0.62S\sqrt{2gh}$$

计算，其中 0.62 为流量系数，S 为孔口的横截面积，现在 $S=1$ cm^2. 故

$$\frac{dV}{dt} = 0.62\sqrt{2gh}$$

另一方面，设在微小时间间隔$[t,t+dt]$内，水面高度由h降至$h+dh(dh<0)$，由此可得到

$$dV = -\pi r^2 dh$$

其中r是时刻t的水面半径，右端置负号是由于$dh<0$而$dV>0$的缘故. 又因

$$r = \sqrt{100^2-(100-h)^2} = \sqrt{200h-h^2}$$

所以上式变成

$$dV = -\pi(200h-h^2)dh$$

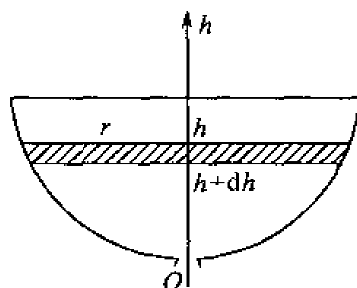


图 8-2

于是得到未知函数$h=h(t)$应满足的微分方程

$$0.62\sqrt{2gh}dt = -\pi(200h-h^2)dh$$

初值条件为

$$h\Big|_{t=0} = 100$$

解此方程，得

$$t = \frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{3/2}+3h^{3/2})$$

此即水从小孔流出的过程中容器内水面高度h与时间t之间的函数关系式(图 8-2).

8.1.3 模拟近似法建模

在社会科学、生物学、医学、经济学等学科的实践中，常常要用模拟近似法来建立微分方程模型. 这是因为，上述学科中的一些现象的规律性我们还不是很清楚，即使有所了解也并不全面，因此，要用数学模型进行研究只能在不同的假设下去模拟实际的现象. 如此模拟近似所建立的微分方程，从数学上求解或分析解的性质，再去同实际情况作对比，观察这个模型能否模拟、近似某些实际的现象.

例 4(交通管理问题) 在交通十字路口，都会设置红绿灯. 为了让那些正行驶在交叉路口或离交叉路口太近而无法停下的车辆通过路口，红绿灯转换中间还要亮起一段时间的黄灯. 对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说，万万不可处于这样的进退两难的境地：要安全停车则离路口太近；要想在红灯亮之前通过路口又觉得太远.

那么，黄灯应亮多长时间才最为合理呢？

对于驶近交叉路口的驾驶员，在他看到黄色信号后要做出决定：是停车还是通过路口. 如果他以法定速度(或低于法定速度)行驶，当决定停车时，他必须有足够的停车距离. 当决定通过路口时，必须有足够的时间使他能完全通过路口。这包括做出停车决定的反应时间以及通过停车所需的最短距离的驾驶时间. 能够很快看到黄灯的驾驶员可以利用刹车距离将车停下.

于是，黄灯状态应持续的时间包括驾驶员的反应时间，车通过交叉路口的时间以及通过刹车距离所需的时间.

如果法定速度为v_0，交叉路口的宽度为I，典型的车身长度为L. 考虑到车通过路口实际上指的是车的尾部必须通过路口，因此，通过路口的时间为$\frac{I+L}{v_0}$.

现在我们来计算刹车距离. 设 W 为汽车的重量, μ 为摩擦系数, 显然, 地面对汽车的摩擦力为 μW, 其方向与运动方向相反. 汽车在停车过程中, 行驶的距离 x 与时间 t 的关系可由下面的微分方程

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu W \tag{1}$$

求得, 其中 g 是重力加速度.

我们给出方程(1)的初值条件

$$x\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \tag{2}$$

于是, 刹车距离就是直到速度 $v=0$ 时汽车驶过的距离.

首先, 求解二阶微分方程(1), 对(1)式从 0 到 t 积分, 再利用初值条件(2), 我们得到

$$\frac{dx}{dt} = -\mu g t + v_0 \tag{3}$$

在条件(2)下对(3)式从 0 到 t 积分, 得

$$x = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t$$

注意到在(3)式中令 $\frac{dx}{dt}=0$, 可得刹车所用的时间 $t_0 = \frac{v_0}{\mu g}$, 从而得到

$$x(t_0) = \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{4}$$

我们计算一下黄灯状态的时间 A:

$$A = \frac{x(t_0) + I + L}{v_0} + T$$

其中 T 是驾驶员的反应时间. 于是

$$A = \frac{v_0}{2\mu g} + \frac{I + L}{v_0} + T$$

如果把 A 与 v_0 关系的图像描绘出来, 则大致如图 8－3 所示.

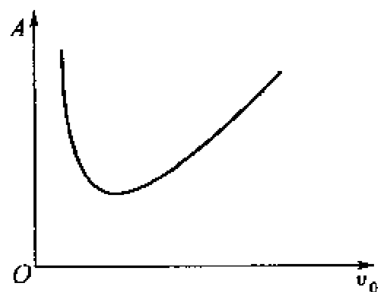


图 8－3 黄灯周期与法定速度的关系

假设 $T=1$ s, $L=4.5$ m, $I=9$ m. 另外, 我们选取具有代表性的 $\mu=0.2$. 当 $v_0=45$ km/h、65 km/h 以及 80 km/h 时, 黄灯时间如表 8－1 所示. 表中给出了经验法的值.

表 8－1

v_0(km/h)	A(s)	经验法(s)
45	5.27	3
65	6.35	4
80	7.28	5

我们注意到, 经验法的结果一律比我们预测的黄灯状态短些. 这使人想起, 许多交叉路口红绿灯的设计可能使车辆在绿灯转为红灯时正处于交叉路口.

8.2 微分方程的定性理论

对某些实际问题,建模的主要目的并不是要寻求动态过程每个瞬时的性态,而是研究某种意义下稳定状态的特征,特别是当时间充分长后动态过程的变化趋势. 为分析这种稳定与不稳定的规律,常常不需求解微分方程,而利用微分方程的稳定性理论,直接研究平衡状态的稳定性即可. 因此,常微分方程的定性和稳定性理论已成为数学建模必备的基础理论知识.

8.2.1 动力学体系、自治系统与非自治系统

1. 基本概念

考虑微分方程组的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t,X) \tag{1}$$

$$X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

其中

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$F(t,X) = \big(f_1(t,x_1,\cdots,x_n), f_2(t,x_1,\cdots,x_n), \cdots, f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\big)^{\mathrm{T}}$$

以下我们都假设 $F(t,X)$ 是 t、X 的函数,且保证解的唯一性,即 $F(t,X)$ 对 X 满足利普希茨(Lipschitz)条件:存在 L,使 $|F(t,X) - F(t,\bar{X})| \leqslant L|X - \bar{X}|$. 于是初值问题(1)、(2)存在唯一的解

$$X = X(t;t_0,X_0) \tag{3}$$

设方程组(1)表示某一运动系统,其中自变量 t 视为时间,而 X 是在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中质点运动时点的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 这时解(3)称为运动系统(1)在时刻 t 时质点通过点(t_0,X_0)的一个运动. 在把时间 t 当作参数的这种解释下,称(1)是一个**动力系统**,称空间 $\mathbf{R}^n$ 为**相空间**. 参数方程(3)在相空间中确定的曲线称为**相轨线**,简称**轨线**.

以下只考虑 $n=2$ 的情形,这时(1)、(2)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(t,x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(t,x,y) \end{cases} \tag{4}$$

它满足初值条件 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 的解为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{5}$$

方程组(4)是**二维动力系统**,Oxy 平面就称为动力系统(4)的**相平面**. 以 t 为参数,解(5)在相平面上所描绘的曲线就是**相轨线或轨线**.

如果方程组(4)的右端函数显含自变量 t,则称它为**非自治系统**,相应地,把右端函数不显含 t 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y) \end{cases} \tag{6}$$

称为**自治系统**(或**定常系统**).

例 1 考虑自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\end{cases}$$

显然,$x=\cos t,y=\sin t$ 是方程组满足初值条件 $x(0)=1,y(0)=0$ 的解. 它在三维空间 $\{(t,x,y)\}$ 中表示的曲线是一条螺线,如图 8-4(a)所示. 如果上述方程是描述质点在平面上运动的动力系统,则以上的解在平面上的轨线是一个圆 $x^2+y^2=1$,它是上述积分曲线在 Oxy 平面上的投影,当 t 增加时,轨线的方向如图 8-4(b)所示,它表明当时刻 $t=0$ 时经过点(1,0)的质点作逆时针方向的周期性运动.

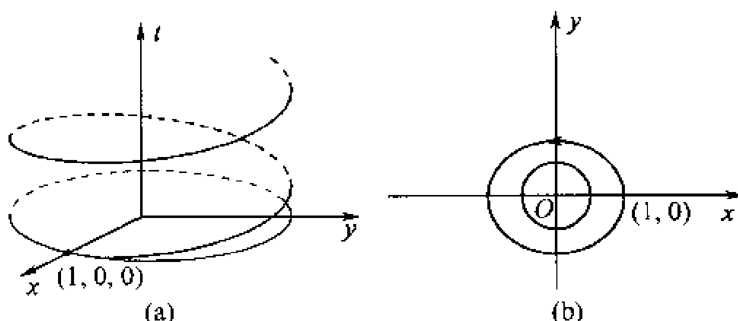


图 8-4

2. 自治系统相轨线的基本性质

假设自治系统(6)的右端函数在相平面 $\mathbf{R}^2$ 上满足存在唯一性定理条件,则它的轨线有以下的基本性质:

性质 1 设 $x=x(t),y=y(t)$ 是自治系统(6)的一个解,则 $x=x(t+c),y=y(t+c)$ 也是(6)的解,其中 c 是任意常数.

性质 2 自治系统(6)经过相平面上任意一点 (x_0,y_0) 存在唯一的一条轨线.

8.2.2 初等奇点附近轨线的分布

1. 常点与奇点

考虑二维自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}\tag{7}$$

以下都假设方程组(7)的右端函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在某个单连通区域 D 内连续,并且满足解的存在唯一性条件.

定义 1 对于区域 D 内的一个点 (x_0,y_0),如果 $[P(x_0,y_0)]^2+[Q(x_0,y_0)]^2\neq0$,则称 $(x_0,$

y_0)为系统(7)的**常点**;如果$[P(x_0,y_0)]^2+[Q(x_0,y_0)]^2=0$,则称$(x_0,y_0)$为系统(7)的**奇点**.

从几何角度看,动力系统(7)在区域 D 内确定了一个向量场$\{P(x,y),Q(x,y)\}$,即对 D 内的每一点(x_0,y_0),对应一个向量,其分量各为 $P(x_0,y_0)$ 及 $Q(x_0,y_0)$. 这样常点对应的是模不为零的向量的点,而奇点对应的一定是零向量,因此,向量场在奇点处的方向是不定的.

设(x_0,y_0)是系统(7)的奇点,则取这个点作为某一时刻 $t=t_0$ 时的开始点$(x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0)$,就得到了系统(7)的唯一解 $x=x_0,y=y_0$,即奇点本身.

定理 1 如果系统(7)的某一解 $x=x(t),y=y(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时趋向于定点$P_0(x_0,y_0)$,并且有 $P_0(x_0,y_0)\in D$,则 P_0 必是系统(7)的奇点.

如果把系统(7)转化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad 或 \quad \frac{dx}{dy}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{8}$$

则系统(7)的轨线就是一阶微分方程(8)的积分曲线,这样就提供了求轨线的一个方法. 但应当指出,在求解(8)时,必须 $P^2(x,y)+Q^2(x,y)\neq 0$,否则(8)是没有意义的.

2. 线性系统的奇点与它附近轨线的分布

考虑系统(7)是线性的情形下,其轨线在相平面上的性态,并根据在奇点邻域内轨线分布的不同性态对奇点进行分类.

二维常系数线性自治系统的一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=cx+dy\end{cases} \tag{9}$$

它的向量形式可写为

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{AX}$$

这里 $\boldsymbol{X}=(x,y)^{T}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,并假设行列式 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$,这时坐标原点是系统的唯一奇点.

根据线性代数理论,对矩阵 $\boldsymbol{A}$,必存在非奇异的实矩阵 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix} \tag{10}$$

使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$. 于是作变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TY}$,$\boldsymbol{Y}=(\xi,\eta)^{T}$,系统(9)就可化成

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ATY}=\boldsymbol{JY}$$

由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根的不同情况,若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$ 有如下四种形式:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

λ 的特征方程为 $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0$,即

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0 \tag{11}$$

引入符号

$$p = -(a+d), \quad q = ad - bc$$

则 A 的特征方程可写成

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

对于系统(9)的奇点(0,0),当 $\det A \neq 0$ 时,可根据 A 的特征根的不同情况判断其类型,并且可根据特征根实部的符号,区分稳定或不稳定的情形. 得到如下关于奇点稳定性的结论:

λ_1, λ_2	p, q	奇点类型	稳定性
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	$p>0, q>0, p^2>4q$	稳定结点	稳定
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	$p<0, q>0, p^2>4q$	不稳定结点	不稳定
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$q<0$	鞍点	不稳定
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$p>0, q>0, p^2=4q$	稳定退化结点	稳定
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$p<0, q>0, p^2=4q$	不稳定退化结点	不稳定
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha < 0$	$p>0, q>0, p^2<4q$	稳定焦点	稳定
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha > 0$	$p<0, q>0, p^2<4q$	不稳定焦点	不稳定
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha = 0$	$p=0, q>0$	中心	不稳定

例 2　考虑二阶线性微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$.

作变换 $\frac{dx}{dt} = y$,可将它化为下列方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 2y \end{cases}$$

这里 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ 且 $\det A \neq 0$. 显然原点(0,0)是系统的唯一奇点. 由特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

得特征根

$$\lambda_1 = -1 + 2i, \quad \lambda_2 = -1 - 2i$$

故(0,0)是稳定焦点.

注意,假若这个方程是描述物体作自由振动的方程(7),这时它表示物体作自由振动时其振幅和速度随时间衰减逐渐趋于静止状态.

8.2.3 关于非线性系统的线性化

考虑一般的二维系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}\tag{12}$$

不妨设原点 $O(0,0)$ 是(12)的奇点,即 $P(0,0)=Q(0,0)=0$. 因为如果(x_0,y_0)是(12)的一个奇点,只要作变换

$$x=x_0+\bar{x},\quad y=y_0+\bar{y}$$

就可以把奇点(x_0,y_0)移到原点.

设 $P(x,y),Q(x,y)$在奇点 $O(0,0)$附近连续可微,并可以将(12)的右端写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=cx+dy+\psi(x,y)\end{cases}\tag{13}$$

其中

$$a=P'_x(0,0),b=P'_y(0,0),c=Q'_x(0,0),d=Q'_y(0,0)$$

我们把二维线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=cx+dy\end{cases}\tag{14}$$

称为(12)的一次近似.

人们自然会提出这样的问题:在什么条件下非线性系统(13)在奇点 $O(0,0)$附近的轨线分布状态能与其一次近似系统(14)在 $O(0,0)$附近的轨线分布状态相一致? 这里我们只不加证明地介绍如下结果.

定理 2 对于方程组(13),假设 $\varphi(x,y)$及 $\psi(x,y)$满足条件:$\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$,并且 $\varphi(x,y)$及 $\psi(x,y)$在原点附近有二阶连续偏导数. 并设

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$$

则当 $O(0,0)$是线性系统(14)的**结点、鞍点或焦点**时,非线性系统(13)与其一次近似方程(14)在 $O(0,0)$附近的轨线分布相一致.

两点补充说明:

1. 当 $O(0,0)$是(14)的中心奇点时,即使假设 $\varphi(x,y)$、$\psi(x,y)$是 x,y 的解析函数,仍不能保证 $O(0,0)$是非线性系统(13)的中心奇点. 至于这时 $O(0,0)$是中心或焦点,虽然已有一些判别方法,但尚有待进一步研究.

2. 当 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=0$ 时,称 $O(0,0)$是非线性系统(12)的**高次奇点**,这时在其附近轨线

分布的形式繁多,也需要深入分析.

8.3　微分方程的稳定性理论

8.3.1　解决稳定性问题的方法

微小的干扰因素对于物质系统运动的影响,对不同的运动是不一样的.对于一些运动,这种影响并不显著,因而受干扰的运动与不受干扰的运动相差很小;反之,对于另外一些运动,干扰的影响就可能很显著,以至于干扰力无论多么小,受干扰的运动与不受干扰的运动随着时间的推移而可能相差很大.这就提出了干扰对运动的影响程度的研究,从而建立了运动的稳定性理论.李雅普诺夫给运动的稳定性以精确的数学定义并系统地解决了运动稳定性问题,创造了解决稳定性问题的两种方法.第一种方法是寻求扰动微分方程组的通解或特解,以级数形式将它们表达出来,最简单的级数形式是任意常数的正整数幂级数,而在该基础上研究稳定性问题.第二种方法则不需考虑扰动微分方程组的解的级数形式,而仅借助于一个称为李雅普诺夫函数的辅助函数与扰动微分方程所计算出来的全导数的符号性质来直接推断稳定性问题.亦称为李雅普诺夫直接法.以下简单介绍利用第二种方法来判断方程组的稳定性问题.

8.3.2　平衡点

假设我们考虑动力系统由下列微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

描述,其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$ 在区域 $G^*=\{(t,\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{y}\in D^*\subset\mathbf{R}^n,t\geqslant t_0\}$ 内连续且满足解的存在唯一性条件.

如果对于某个常数点 $\boldsymbol{y}_0\in D^*$,有 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}_0)=0$,则称点 $\boldsymbol{y}_0$ 是系统(1)的**平衡点**或**平衡位置**,且称 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0$ 是系统(1)的**平凡解**.

设在 $t=t_0$ 时刻过初始点 $\boldsymbol{y}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{2}$$

则我们关心的是:在时刻 $t=t_0$ 过 $\boldsymbol{y}_0$ 邻域内任一点 $\boldsymbol{y}_1$ 的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_1)$ 与解(2)当 t 增加时是否还在解(2)的邻域内;换句话说,即是否有:任给 $\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_0\|<\delta$ 时,有 $\|\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|<\varepsilon(t\geqslant t_0)$.如果对一切 $t\geqslant t_0$,上面的不等式均成立,则称解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是**稳定的**;否则称其是**不稳定的**.

为了讨论方便,先作变换,令

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))=\boldsymbol{g}[t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t)]-\boldsymbol{g}[t,\boldsymbol{\varphi}(t)]=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$$

显然有 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,故系统(1)变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

于是可知 $y=\varphi(t)$ 是系统(1)的解对应于(3)的解. 这样,研究方程组(1)的任一特解 $y=\varphi(t)$ 的稳定性问题可转化为研究系统(3)的平凡解 $x=0$ 的稳定性问题.

8.3.3 稳定性的定义

对于系统(3)的零解的稳定性定义,通常是指李雅普诺夫意义下的稳定性定义. 假设系统(3)右端函数满足条件:

(1) $f(t,0)=0$,

(2) 存在某个 H,使得在 $G_H=\{(t,x)\mid \|x\|\leqslant H, t\geqslant t_0, x\in\mathbf{R}^n\}$ 上有连续的偏导数.

在 $f(t,x)$ 的假设下,$x=0$ 是系统(3)的平凡解且系统(3)满足解的存在唯一性、延拓、解对参数的连续性、可微性等条件. 下面给出稳定性的定义.

定义 1 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$,若当 $\|x_0\|<\delta$ 时,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon\ (\forall t\geqslant t_0)$$

则称方程组(3)的零解是稳定的.

定义 2 如果方程组(3)的零解是稳定的,且有这样的 $\delta_0>0$,使当 $\|x_0\|<\delta_0$ 时,满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t,t_0,x_0)$,均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,t_0,x_0)=0$,则称方程组(3)的零解是**渐近稳定**的.

定义 3 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$,若 $\exists x_0$ 满足 $\|x_0\|<\delta$,且 $\exists t_1>t_0$,有

$$\|x(t_1,t_0,x_0)\|\geqslant\varepsilon_0$$

则称方程组(3)的零解是**不稳定**的.

定义 4 若 $x=0$ 渐近稳定,且存在域 D_0,当且仅当 $x_0\in D_0$ 时满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,t_0,x_0)=0$,则域 D_0 称为(渐近)稳定域. 若稳定域为全空间,即 $\delta_0=+\infty$,则称零解 $x=0$ 为**全局渐近稳定**或简称**全局稳定**.

定义 5 在定义 1 中,若 δ 与 ε 的选取无关,则称零解是**一致稳定**的.

8.3.4 关于李雅普诺夫函数(V 函数)

李雅普诺夫第二方法的特点是不必求出微分方程的解,而借助于构造一个具有特殊性质的函数,结合方程组本身来讨论稳定性. 此函数即李雅普诺夫函数.

考虑纯量函数 $V(x)$($V(t,x)$)满足如下条件:

(1) $V(0)=0$ ($V(t,0)\equiv0$);

(2) 在定义域

$$D_H=\{x\mid \|x\|<H\}\ \left(G_H=\{(t,x)\mid x\in D_H, t\geqslant t_0\}\right)$$

上有定义、连续和有连续的一阶偏导数;如果要求全局稳定时,只需要取 $H=+\infty$ 即可.

下面给出定号函数的定义.

定义 6 如果 $\forall x\in D_H\setminus\{0\}$,均有 $V(x)>0$,则称 $V(x)$ 是**定正函数**;如果 $-V(x)$ 是定正函数,则称 $V(x)$ 是**定负函数**;定正和定负函数统称为**定号函数**.

定义 7 如果 $\forall x\in D_H$,均有 $V(x)\geqslant0$,则称 $V(x)$ 是常正函数;如果 $-V(x)$ 是常正函数,则称 $V(x)$ 是**常负函数**;常正和常负函数统称为**常号函数**.

定义 8 称不是常号的函数为**变号函数**.

定义 9 设 $\omega(\boldsymbol{x})$ 是定正函数，若 $V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant \omega(\boldsymbol{x})$，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 是**定正函数**；如果 $-V(t,\boldsymbol{x})$ 是定正函数，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 是**定负函数**.

定义 10 若对一切 $(t,\boldsymbol{x}) \in G_H$，均有 $V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 是**常正函数**；如果 $-V(t,\boldsymbol{x})$ 是常正函数，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 是**常负函数**.

定号函数的几何意义. 仅考虑二维空间中的定正函数 $V = V(x_1,x_2)$. 在三维空间 $\{(x_1,x_2,V)\}$ 中，$V = V(x_1,x_2)$ 是一个位于坐标面 Ox_1x_2 上方的曲面；在 $x_1^2 + x_2^2 \leqslant H^2$ 内它与坐标面只有在原点接触（图 8－5），用水平面 $V = c$ 切割曲面 $V = V(x_1,x_2)$，当 c 是适当小的正数时，截线是一条闭曲线 $V(x_1,x_2) = c$，其投影到 Ox_1x_2 平面上就是曲线 $V(x_1,x_2) = c$. 由于 (x_1,x_2) 连续可微，且 $V(0,0) = 0$，所以当 c 取一系列足够小的正数时，$V(x_1,x_2) = c$ 是包围原点的封闭曲线族. 且当 $c_1 > c_2 > 0$ 时，闭曲线 $V(x_1,x_2) = c_2$ 整个包含在闭曲线 $V(x_1,x_2) = c_1$ 之内，因为 $V(x_1,x_2)$ 是单值的，所以这族曲线不相交.

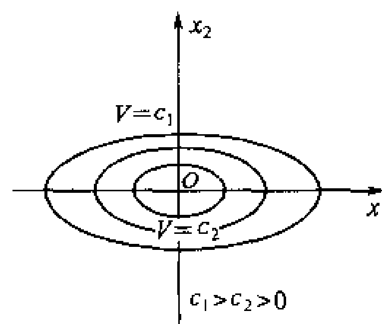


图 8－5

8.3.5 稳定性的基本定理

1. 李雅普诺夫稳定性定理

考虑驻定系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $D_H = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqslant H\}$（$H > 0$ 常数）上有定义，且系统(4)的解满足存在唯一性条件，并且有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big)^{\mathrm{T}}$$

设纯量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在 D_H 上有定义、连续且有一阶连续偏导数和 $V(\boldsymbol{0}) = 0$. 取函数 $V(\boldsymbol{x})$ 沿着系统(4)的解的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \mathrm{grand}V(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \omega(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

显然，$\omega(\boldsymbol{x})$ 在 D_H 上有定义、连续且满足 $\omega(\boldsymbol{0}) = 0$.

定理 1 对于方程组(4)的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，如果存在 $V(\boldsymbol{x})$，满足

(1) $V(\boldsymbol{x})$ 定正（定负），

(2) 由(5)式定义的 $\omega(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$（$\geqslant 0$），

则方程组(4)的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是稳定的.

定理 2 对于方程组(4)的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，如果存在 $V(\boldsymbol{x})$，满足

(1) $V(\boldsymbol{x})$ 定正（定负），

(2) 由(5)式定义的 $\omega(\boldsymbol{x})$ 定负（定正），

则系统(4)的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的.

2. 李雅普诺夫不稳定定理

定理 3 对于系统(4)的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，如果存在 $V(\boldsymbol{x})$，满足

(1) $V(x)$是定号函数,

(2) 由(5)式定义的 $\omega(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$,但在原点的任一邻域内至少有一点 x_0,使

$$V(x_0)>0(<0)$$

则称系统(4)的解 $x=0$ 是不稳定的.

定理 4 对于系统(4)的解 $x=0$,如果存在 $V(x)$,满足

(1) $V=\lambda V+\omega(x)$,其中 $\lambda>0$ 是常数,

(2) $\omega(x)\equiv 0$ 或 $\omega(x)$常号,且存在任意小的 x,使得 $V(x)>0$,

则称系统(4)的解 $x=0$ 是不稳定的.

3. 非驻定系统的稳定性定理

考虑非驻定系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{6}$$

其中$f(t,x)$在 $I_0\times D_H(I_0=[t_0,+\infty))$上有定义、连续且满足解的存在唯一性条件,对一切 $t\geqslant t_0$,有 $f(t,0)\equiv 0$.

考虑纯量函数 $V(t,x)$,使得 $V(t,x)$在 $I_0\times D_H$ 上有定义、连续和有连续的一阶偏导数,且对一切 $t\geqslant t_0$ 均有 $V(t,0)\equiv 0$.

定理 5 对于系统(6)的解 $x=0$,如果存在函数 $V(t,x)$,满足

(1) $V(t,x)$定正(定负),

(2) $V(t,x)\leqslant 0(\geqslant 0)$,

则系统(6)的解 $x=0$ 是稳定的.

定理 6 对于系统(6)的解 $x=0$,如果存在函数 $V(t,x)$,满足

(1) $V(t,x)$定正(定负),

(2) 当 $x\to 0$ 时 $V(t,x)$一致趋于零,

(3) $V(t,x)\leqslant 0(\geqslant 0)$,

则系统(6)的解 $x=0$ 是一致稳定的.

8.4 微分方程数值解

科学研究和工程技术中的问题往往归结为求某个常微分方程的定解问题.

常微分方程的理论指出,很多方程的定解问题虽然存在,但在生产和科研中所处理的微分方程往往很复杂且大多求不出解析解,因此常求其能满足精度要求的近似解.

常微分方程的数值解法常用来求近似解,由于它提供的算法能通过计算机便捷地实现,因此近年来得到迅速的发展和广泛的应用.

常微分方程数值解法的特点是:对求解区间进行剖分,然后把微分方程离散成在结点上的近似公式或近似方程,最后结合定解条件求出近似解.

8.4.1 欧拉方法

考察一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

其中函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件,保证初值问题(1)-(2)解的存在且唯一.

此问题的最简单而直观的数值方法是欧拉方法.欧拉方法在精度要求不高时,不失为一种实用方法.下面导出欧拉方法.

方程(1)中含有导数项 $y'(x)$,这是微分方程的本质特征,也正是它难以求解的症结所在.数值解法的第一步就是设法消除其导数项,这项手续称**离散化**.由于差分是微分的近似运算,实现离散化的基本途径是用差商替代导数.譬如,若在点 x_n 列出方程(1)

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$$

并用差商 $\dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$ 替代其中的导数项 $y'(x)$,结果有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

设用 $y(x_n)$ 的近似值 y_n 代入上式右端,记所得结果为 y_{n+1},这样导出的计算公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3}$$

就是**欧拉格式**.若初值 y_0 已知,则据(3)可逐步求出 $y_1, y_2, \cdots$.

8.4.2 梯形方法

将方程 $y' = f(x,y)$ 的两端从 x_n 到 x_{n+1} 求积分,得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

要通过这个积分关系式得到 $y(x_{n+1})$ 的近似值,只要近似地算出其中的积分项 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x$ 即可,用梯形方法来计算积分项:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right]$$

将式中的 $y(x_n)$、$y(x_{n+1})$ 分别用 y_n、y_{n+1} 替代,作为离散化的结果导出下列计算格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] \tag{4}$$

这一差分格式称作**梯形格式**.

欧拉方法是一种显式算法,其计算量小,但精度很低;梯形方法虽提高了精度,但它是一种隐式算法,需要迭代求解,计算量大.

综合使用这两种方法,先用欧拉方法求得一个初步的近似值 $\bar{y}_{n+1}$,称之为预报值;预报值 $\bar{y}_{n+1}$ 的精度不高,我们用它代替(4)式右端的 y_{n+1} 再直接计算,得到校正值 y_{n+1}.这样建立的预报-校正系统

$$\text{预报} \quad \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$\text{校正} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right]$$

称作梯形公式的**预报-校正格式**.

例 1 用欧拉公式和梯形公式的预报-校正法计算

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

的数值解，取 $h=0.1$，梯形公式只迭代一次，并与精确值比较. 方程的解析解为 $y=\sqrt{1+2x}$.

解 欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.1 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) = 1.1y_n - \dfrac{0.2x_n}{y_n} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

梯形公式只校正一次的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = 1.1y_n - \dfrac{0.2x_n}{y_n} \\ y_{n+1} = y_n + 0.05 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} + y_{n+1}^{(0)} - \dfrac{2x_{n+1}}{y_{n+1}^{(0)}}\right) \\ y_0 = 1, \quad x_0 = 0 \end{cases}$$

结果列入下表：

x_n	欧拉方法	梯形法	精确值
0.1	1.100 000	1.095 909	1.095 445
0.2	1.191 818	1.184 097	1.183 216
0.3	1.277 438	1.266 201	1.246 911
0.4	1.358 213	1.343 360	1.341 641
0.5	1.435 133	1.416 402	1.414 214
0.6	1.508 966	1.485 956	1.483 240
0.7	1.580 338	1.552 515	1.549 193
0.8	1.649 783	1.616 475	1.612 452
0.9	1.717 779	1.678 167	1.673 320
1.0	1.784 771	1.737 868	1.732 051

8.4.3 龙格－库塔方法

1. 龙格－库塔方法的基本思想

考察差商 $\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$，根据微分中值定理，存在点 ξ，$x_n<\xi<x_{n+1}$，使得

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} = y'(\xi)$$

从而利用所给方程 $y'=f$ 得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(\xi, y(\xi)) \tag{5}$$

其中的 $K^* = f(\xi, y(\xi))$，称作区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的平均斜率. 这样，只要对平均斜率提供一种算法，由(5)式便相应地导出一种计算格式.

考察欧拉方法的公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

它简单地取点 x_n 的斜率值 $K_1=f(x_n,y_n)$ 作为平均斜率 K^*，精度自然很低.

再考察(4)，它亦可改写成

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(K_1+K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_{n+1},y_n+hK_1) \end{cases}$$

可以理解为：它用 x_n 与 x_{n+1} 两个点的斜率值 K_1 和 K_2 取算术平均作为平均斜率 K^*，而 x_{n+1} 处的斜率值 K_2 则利用欧拉方法来预报.

这个处理过程启示我们，如果设法在 $[x_n,x_{n+1}]$ 内多预报几个点的斜率值，然后将它们取加权平均作为平均斜率，则有可能构造出具有高精度的计算格式，这就是龙格－库塔方法的基本思想.

2. 二阶龙格－库塔方法

考察区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 内一点

$$x_{n+p}=x_n+ph,\quad 0<p\leqslant 1$$

用 x_n 和 x_{n+p} 两个点的斜率值 K_1 和 K_2 加权平均得到平均斜率 K^*，即令

$$y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2]$$

式中的 λ 为待定系数. 仍取 $K_1=f(x_n,y_n)$，问题在于该如何预报 x_{n+p} 处的斜率值 K_2? 先用欧拉方法提供 $y(x_{n+p})$ 的预报值 y_{n+p}：

$$y_{n+p}=y_n+phK_1$$

然后用 y_{n+p} 通过计算 f 产生斜率值 $K_2=f(x_{n+p},y_{n+p})$.

这样设计出的计算格式具有形式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2] \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+ph,y_n+phK_1) \end{cases} \tag{6}$$

其中含两个待定参数 λ、p，我们适当选取这些参数的值，使得格式(6)具有较高的精度.

假定 $y_n=y(x_n)$，分别将 K_1 和 K_2 作泰勒展开，有

$$\begin{aligned} K_1&=f(x_n,y_n)=y(x_n) \\ K_2&=f(x_{n+p},y_n+phK_1) \\ &=f(x_n,y_n)+ph[f_x(x_n,y_n)+f(x_n,y_n)f_y(x_n,y_n)]+O(h^2) \\ &=y'(x_n)+phy''(x_n)+O(h^2) \end{aligned}$$

代入(6)式知

$$y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\lambda ph^2y''(x_n)+O(h^3)$$

和二阶泰勒展开式

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$$

比较系数即可发现，欲使格式(6)的截断误差为 $O(h^3)$，只要 $\lambda p=\frac{1}{2}$.

满足这一条件的一簇格式统称二阶龙格－库塔格式. 特别地, 当 $p=1, \lambda=\frac{1}{2}$ 时, 龙格－库塔格式(6)就是梯形公式的预报－校正格式.

3. 四阶龙格－库塔方法

用类似的方法可以确定三级和四级龙格－库塔方法的参数, 构造出三阶和四阶的龙格－库塔方法. 常用的是四阶龙格－库塔方法, 四阶龙格－库塔方法也不止一个, 下面给出的是最常用的四阶经典的龙格－库塔公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \tag{7}$$

例 2 用经典的四阶龙格－库塔法计算:

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

取步长为 0.2, 且与准确值比较.

解 由(7)得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.2}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} \\ K_2 = y_n + 0.1K_1 - 2\dfrac{x_n + 0.1}{y_n + 0.1K_1} \\ K_3 = y_n + 0.1K_2 - 2\dfrac{x_n + 0.1}{y_n + 0.1K_2} \\ K_4 = y_n + 0.2K_3 - 2\dfrac{x_n + 0.2}{y_n + 0.2K_3} \end{cases}$$

计算结果列入下表:

x_n	y_n	$y(x_n)$
0	1	1
0.2	1.183 229	1.183 216
0.4	1.341 667	1.341 641
0.6	1.483 281	1.483 240
0.8	1.612 514	1.612 452
1.0	1.732 142	1.732 051

可见,即使用 $h=0.2$ 计算,也比一阶和二阶龙格 - 库塔方法精度高得多.

8.4.4 一阶常微分方程组和高阶方程

1. 一阶方程组

前面研究了单个方程 $y'=f$ 的差分方法,只要把 y 和 f 理解为向量,则所提供的各种算法即可推广应用到一阶方程组的情形.

对于方程组

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z), & y(x_0) = y_0 \\ z' = g(x,y,z), & z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

令 $x_n = x_0 + nh, n = 1,2,\cdots$,以 y_n、z_n 表示结点 x_n 上的近似解,则其梯形公式的预报 - 校正格式具有形式:

$$\text{预报} \quad \begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n,y_n,z_n) \\ \bar{z}_{n+1} &= z_n + hg(x_n,y_n,z_n) \end{aligned}$$

$$\text{校正} \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n,z_n) + f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \\ \bar{z}_{n+1} &= z_n + \frac{h}{2}[g(x_n,y_n,z_n) + g(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \end{aligned}$$

相应的四阶龙格 - 库塔格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \\ K_1 = f(x_n,y_n,z_n) \\ L_1 = g(x_n,y_n,z_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1, z_n + \frac{h}{2}L_1\right) \\ L_2 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1, z_n + \frac{h}{2}L_1\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2, z_n + \frac{h}{2}L_2\right) \\ L_3 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2, z_n + \frac{h}{2}L_2\right) \\ K_4 = f(x_{n+1}, y_n + hK_3, z_n + hL_3) \\ L_4 = g(x_{n+1}, y_n + hK_3, z_n + hL_3) \end{cases}$$

2. 高阶常微分方程

高阶微分方程的初值问题,原则上总可以归结为一阶方程组来求解. 以二阶常微分方程为例:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y,y'), & x_0 \leqslant x \leqslant x_n \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

则可令 $z=y'$，化为一阶方程组求解：

$$\begin{cases} y'(x)=z, & y(x_0)=y_0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_n \\ z'(x)=f(x,y,z), & z(x_0)=z_0 \end{cases}$$

8.5　用 MATLAB 解微分方程

8.5.1　微分方程(组)的解析解

求微分方程(组)的解析解用函数 dsolve.

求解微分方程时，需要将微分方程包含在 dsolve 的表达式中. 在表达微分方程时，用字母 D 表示求微分，D2、D3 等表示求高阶微分. 任何 D 后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由 symvar 规则选定为缺省. 例如，微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 应表达为：D2y = 0.

下面举几个例子.

例 1　求 $\frac{du}{dt}=1+u^2$ 的通解.

解　命令为：dsolve('Du = 1 + u^2','t')

结果为：ans =

```
tan(t - C1)
```

例 2　求下列微分方程的特解.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+29y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=15 \end{cases}$$

解　命令为：y = dsolve('D2y + 4 * Dy + 29 * y = 0','y(0) = 0,Dy(0) = 15','x')

结果为：y =

```
3 * exp( -2 * x) * sin(5 * x)
```

例 3　求下列微分方程组的通解.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-3y+3z \\ \frac{dy}{dt}=4x-5y+3z \\ \frac{dz}{dt}=4x-4y+2z \end{cases}$$

解　命令为：

```
[x,y,z] = dsolve('Dx = 2 * x - 3 * y + 3 * z','Dy = 4 * x - 5 * y + 3 * z','Dz =
        4 * x - 4 * y + 2 * z','t');
x = simple(x)          % 将 x 化简
y = simple(y)
```

```
z = simple(z)
```

结果为：

```
x =
    -( -C1 -C2 * exp( -3 * t) + C2 - C3 + C3 * exp( -3 * t)) * exp(2 * t)
y =
    -(C1 * exp( -4 * t) - C1 - C2 * exp( -4 * t) - C2 * exp( -3 * t) + C2 -
    C3 + C3 * exp( -3 * t)) * exp(2 * t)
z =
    ( -C1 * exp( -4 * t) + C1 - C2 + C2 * exp( -4 * t) + C3) * exp(2 * t)
```

在符号运算方面，MATLAB 软件的功能不如 Mathematica 软件强，在求微分方程的解析解方面就是如此. 对某些微分方程，用 MATLAB 软件求不出其解析解，但用 Mathematica 软件可能求出. Mathematica 软件的用法可参见其用户手册.

8.5.2 微分方程(组)的数值解

当难以求得微分方程的解析解时，可以求其数值解 .MATLAB 中求微分方程数值解的函数有五个：ode45，ode23，ode113，ode15s，ode23s. 程序为：

```
[t,x] = solver('f',ts,x0,options)
```

solver 取以上五个函数之一，不同的函数代表不同的内部算法. 其中 ode23 运用一个组合的$\frac{2}{3}$阶龙格－库塔－费尔贝格算法，而 ode45 运用组合的$\frac{4}{5}$阶龙格－库塔－费尔贝格算法. 一般常用函数 ode45.

f 是由待解方程写成的 M 文件名；ts = [t0,tf]，t0、tf 为自变量的初值和终值；x0 为函数的初值；options 用于设定误差限(可以缺省，缺省时设定为相对误差 10^{-3}，绝对误差 10^{-6})，程序为：

```
options = odeset('reltol',rt,'abstol',at)
```

这里 rt，at 分别为设定的相对误差和绝对误差.

在解 n 个未知函数的方程组时，$\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$ 均为 n 维向量，M 文件中的待解方程组应以 $\boldsymbol{x}$ 的分量形式写成.

下面通过几个例子说明 ode 函数的用法.

例 4 解 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 1000(1-x^2)\dfrac{dx}{dt} + x = 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$

解 与所有的微分方程数值解法一样，高阶微分方程式必须等价地变换成一阶微分方程组. 对于上述微分方程，通过重新定义两个新的变量，来实现这种变换.

令 $y_1 = x, y_2 = y_1'$，则微分方程变为方程组：

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1 \end{cases}$$

1. 建立 M 文件 vdp1000.m 如下：

```
function dy = vdp1000(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = 1000 * (1 - y(1)^2) * y(2) - y(1);
```

2. 取 t0 = 0, tf = 3 000, 输入命令:

```
[T,Y] = ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]);
plot(T,Y(:,1),'-');
```

得 x 与 t 的关系(图 8 - 6).

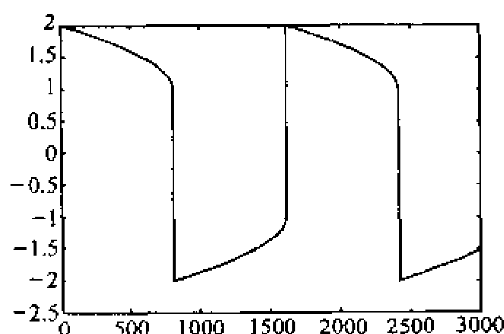


图 8 - 6

例 5 解微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = y_1 y_3 \\ y_3' = 0.51 y_1 y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

解 (1) 建立 M 文件 rigid.m 如下:

```
function dy = rigid(t,y)
dy = zeros(3,1);
dy(1) = y(2) * y(3);
dy(2) = -y(1) * y(3);
dy(3) = -0.51 * y(1) * y(2);
```

(2) 取 t0 = 0, tf = 12, 输入命令:

```
[T,Y] = ode45('rigid',[0  12],[0  1  1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3),'+')
```

得 y_1、y_2、y_3 与 t 的关系(图 8 - 7), 其中, y_1 的图形为实线; y_2 的图形为" * "线; y_3 的图形为" + "线.

例 6 求 8.1 节例 2: 目标跟踪问题的数值解.

解 (1) 首先要将此问题表达为等价的一阶微分方程组, 现在建立此问题的参数方程. 设在任意时刻 t, 乙舰的坐标为 $(X(t), Y(t))$, 导弹的坐标为 $(x(t), y(t))$.

1) 设导弹速度恒为 w, 则

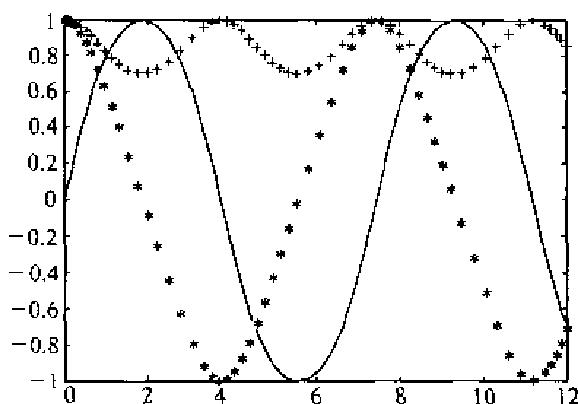


图 8-7

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = w^2 \tag{1}$$

2）由于导弹头始终对准乙舰，故弹头的速度向量平行于乙舰与导弹头位置的差向量，即：

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X - x \\ Y - y \end{bmatrix}, \lambda > 0 \tag{2}$$

故

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \lambda^2[(X-x)^2 + (Y-y)^2] \tag{3}$$

将(1)代入(3)，得

$$\lambda = \frac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}} \tag{4}$$

将(4)代入(2)，得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}(X-x) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}(Y-y) \end{cases} \tag{5}$$

因乙舰以速度 v_0 沿直线 $x=1$ 运动，设 $v_0=1$，则 $w=5$. 有

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = t \end{cases}$$

$t=0$ 时，甲舰位于原点，故

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

因此导弹运动轨迹的参数方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}(1-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{5}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}(t-y) \\ x(0)=0,\ y(0)=0 \end{cases} \tag{6}$$

（2）解导弹运动轨迹的参数方程(6)：

1）建立 M 文件 eq2.m 如下：

```
function dy = eq2(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) =5 * (1 -y(1)) /sqrt((1 -y(1))^2 +(t -y(2))^2);
dy(2) =5 * (t -y(2)) /sqrt((1 -y(1))^2 +(t -y(2))^2);
```

2）取 t0 =0,tf =2,建立程序 chase2.m 如下：

```
t0 =0,tf =2;
[t,y] =ode45('eq2',[t0 tf],[0 0]);
x =1;
y =0: 0.01: 2;
plot(x,y,'-')
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
```

运行 chase2.m，得导弹运动的轨迹（图 8－8），图中"＊"线为导弹运动轨迹．

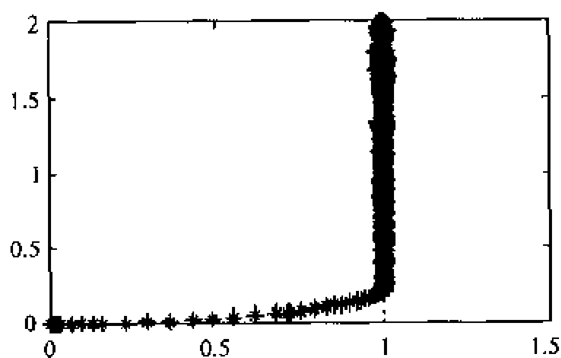


图 8－8

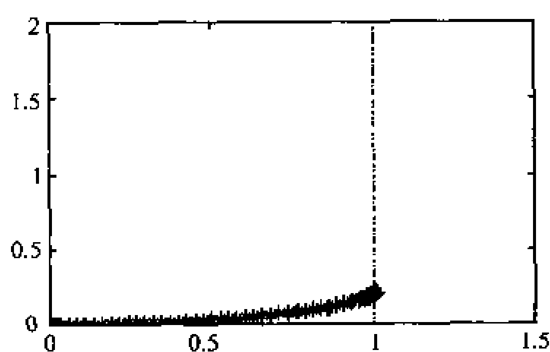


图 8－9

3）由图 8－8 可以看出，导弹大致在(1,0.2)处击中乙舰，这与 8.1 节例 2 的结论$\left(1,\dfrac{5}{24}\right)$近似．

逐步修改 chase2.m 中的 tf，直到 tf =0.21 时，得图 8－9，可看出当 $t\approx$ tf =0.21 时，导弹击中乙舰．

例 7（慢跑者与狗） 一个慢跑者在平面上沿椭圆以恒定的速率 $v=1$ 跑步，设椭圆方程为：x

$=10+20\cos t, y=20+15\sin t$. 突然有一只狗攻击他，这只狗从原点出发，以恒定速率 w 跑向慢跑者，狗的运动方向始终指向慢跑者. 分别求出 $w=20, w=5$ 时狗的运动轨迹.

解 (1) 模型建立 设时刻 t 慢跑者的坐标为 $(X(t), Y(t))$，狗的坐标为 $(x(t), y(t))$，则 $X=10+20\cos t, Y=20+15\sin t$，狗从(0,0)出发，与导弹追踪问题类似，建立狗的运动轨迹的参数方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{w}{\sqrt{(10+20\cos t-x)^2+(20+15\sin t-y)^2}}(10+20\cos t-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{w}{\sqrt{(10+20\cos t-x)^2+(20+15\sin t-y)^2}}(20+15\sin t-y) \\ x(0)=0, \quad y(0)=0 \end{cases}$$

(2) 模型求解

1) $w=20$ 时

先建立 M 文件 eq3.m 如下：

```
function dy = eq3(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) =20 * (10 +20 * cos(t) -y(1)) /sqrt((10 +20 * cos(t) -y(1))^2
          +(20 +15 * sin(t) -y(2))^2);
dy(2) =20 * (20 +15 * sin(t) -y(2)) /sqrt((10 +20 * cos(t) -y(1))^2
          +(20 +15 * sin(t) -y(2))^2);
```

再取 t0 =0,tf =10,建立主程序 chase3.m 如下：

```
t0 =0;tf =10;
[t,y] =ode45('eq3',[t0 tf],[0 0]);
T =0:0.1:2 * pi;
X =10 +20 * cos(T);
Y =20 +15 * sin(T);
plot(X,Y,'-')
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
```

在 chase3.m 中不断修改 tf 的值，分别取 tf =5,2.5,3.5,…，至 3.15 时，狗刚好追上慢跑者.如图 8-10，椭圆为慢跑者的轨迹，“ * ”线为狗的轨迹.

2) $w=5$ 时

先建立 M 文件 eq4.m 如下：

```
function dy = eq4(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) =5 * (10 +20 * cos(t) -y(1)) /sqrt((10 +20 * cos(t) -y(1))^2
          +(20 +15 * sin(t) -y(2))^2);
dy(2) =5 * (20 +15 * sin(t) -y(2)) /sqrt((10 +20 * cos(t) -y(1))^2
          +(20 +15 * sin(t) -y(2))^2);
```

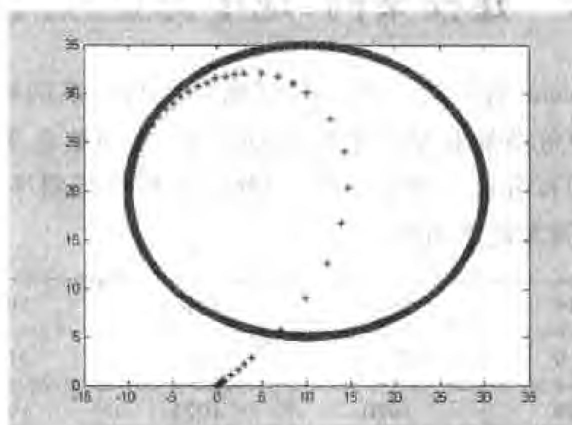


图 8-10

再取 t0 =0,tf =10,建立主程序 chase4.m 如下:

```
t0 =0;tf =10;
[t,y] =ode45('eq4',[t0 tf],[0 0]);
T =0:0.1:2 * pi;
X =10 +20 * cos(T);
Y =20 +15 * sin(T);
plot(X,Y,'-')
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
```

在 chase4.m 中不断修改 tf 的值,分别取 tf =20, 40, 80,…;可以看出,狗永远追不上慢跑者.如图 8-11,椭圆为慢跑者的轨迹,"*"线为狗的轨迹.随着时间增加,狗沿着一个小椭圆奔跑,永远也追不上人.

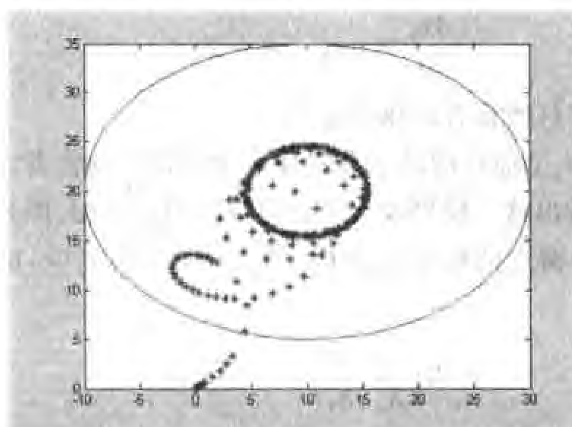


图 8-11

8.6 建模案例:地中海鲨鱼问题

意大利生物学家 D'Ancona 曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究. 从第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中,发现鲨鱼等的比例有明显增加(见下表),而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降. 显然战争使捕鱼量下降,食用鱼增加,鲨鱼等也随之增加,但为何鲨鱼的比例大幅增加呢?

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比(%)	27.3	16.0	15.9	14.8	19.7

他无法解释这个现象,于是求助于著名的意大利数学家 V. Volterra,希望能建立一个食饵-捕食系统的数学模型,定量地回答这个问题.

Volterra 模型 食饵和捕食者在时刻 t 的数量分别记作 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$. 因为大海中资源丰富,可以假设如果食饵独立生存则将以增长率 r_1 按指数规律增长,即有 $\frac{dx_1}{dt}=r_1x_1$. 捕食者的存在使食饵的增长率降低,设降低的程度与捕食者数量成正比,于是 $x_1(t)$ 满足方程

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1(r_1-\lambda_1x_2) \tag{1}$$

其中,比例系数 λ_1 反映捕食者掠取食饵的能力.

捕食者离开食饵无法生存,若设它独自存在时死亡率为 r_2,即 $\frac{dx_2}{dt}=-r_2x_2$,而食饵为它提供食物的作用相当于使其死亡率降低,或使之增长. 设这个作用与食饵数量成正比,于是 $x_2(t)$ 满足

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2(-r_2+\lambda_2x_1) \tag{2}$$

其中,比例系数 λ_2 反映食饵对捕食者的供养能力.

方程(1)、(2)是在没有人工捕获情况下自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系,是 Volterra 提出的最简单的模型. 可以看出这个模型没有考虑自身的阻滞作用,即未引入 Logistic 项.

模型分析 仍然通过平衡点的稳定性分析,研究 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的变化规律. 容易得到方程(1)、(2)的平衡点为

$$P_0\left(\frac{r_2}{\lambda_2},\frac{r_1}{\lambda_1}\right),\quad P_0'(0,0) \tag{3}$$

计算它们的 p,q(见 8.2 节)发现,对于 P_0',$q<0$ 时,P_0' 不稳定;对于 P_0,$q>0$ 时,处于临界状态,因此不能用判断线性方程平衡点稳定性的准则讨论非线性方程(1)、(2)的平衡点 P_0 的情况. 下面用分析相轨线的方法解决这个问题.

为确定相轨线,从(1)、(2)中消去 dt,得

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_1(r_1-\lambda_1x_2)}{x_2(-r_2+\lambda_2x_1)}$$

将变量分离,再积分得到

$$-r_2\ln x_1+\lambda_2x_1=r_1\ln x_2-\lambda_1x_2+c_1$$

上式可以改写成

$$(x_1^{r_2}e^{-\lambda_2x_1})(x_2^{r_1}e^{-\lambda_1x_2})=c \tag{4}$$

其中,c 是任意常数. 为了研究由(4)式确定的相轨线的图形,记

$$\varphi(x_1)=x_1^{r_2}e^{-\lambda_2x_1} \tag{5}$$

$$\psi(x_2)=x_2^{r_1}e^{-\lambda_1x_2} \tag{6}$$

利用数学分析方法可以作出 φ 和 ψ 的图形(图 8-12),若它们的极大值分别记作 φ_m 和 ψ_m,则不难确定 x_1^0、x_2^0 满足

$$\varphi(x_1^0)=\varphi_m,\quad x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2} \tag{7}$$

$$\psi(x_2^0)=\psi_m,\quad x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \tag{8}$$

显然仅当(4)式右端常数 $c\leqslant\varphi_m\psi_m$ 时相轨线才有意义.

当 $c=\varphi_m\psi_m$ 时,$x_1=x_1^0$,$x_2=x_2^0$,将(7)、(8)与(3)式比较可知(x_1^0,x_2^0)正是平衡点 P_0,所以 P_0 是相轨线的退化点.

为了考察 $c<\varphi_m\psi_m$ 时($c>0$)轨线的形状,首先设 $c=\alpha\psi_m(0<\alpha<\varphi_m)$. 若令 $x_2=x_2^0$,则由(4)—(8)式可得 $\varphi(x_1)=\alpha$. 而从图 8-12 知道,必存在 x_1' 和 x_1'' 使 $\varphi(x_1')=\varphi(x_1'')=\alpha$,且 $x_1'<x_1^0<x_1''$. 于是这条轨线应通过 $Q_1(x_1'',x_2^0)$ 和 $Q_2(x_1',x_2^0)$点.

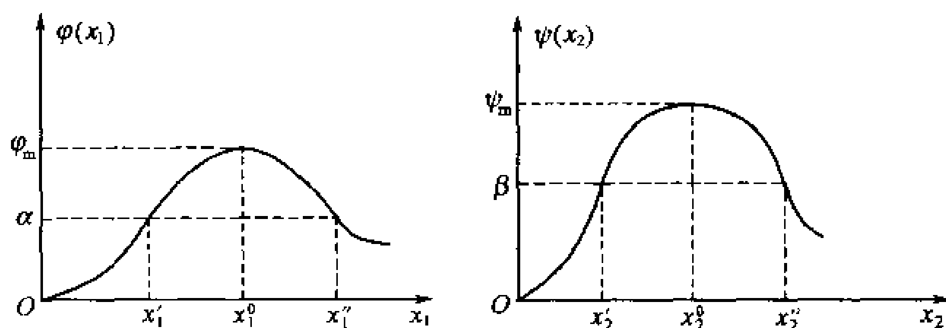


图 8-12

接着,分析区间(x_1',x_1'')内的任一点 x_1. 因为 $\varphi(x_1)>\alpha$,代入 $\varphi(x_1)\psi(x_2)=\alpha\psi_m$ 可知 $\psi(x_2)<\psi_m$,记 $\psi(x_2)=\beta(<\psi_m)$,从图 8-12 知道,存在 x_2' 和 x_2'',使 $\psi(x_2')=\psi(x_2'')=\beta$,且 $x_2'<x_2^0<x_2''$. 于是这条轨线又通过 $Q_3(x_1,x_2')$ 和 $Q_4(x_1,x_2'')$点(图 8-13). 注意到 x_1 点是(x_1',x_1'')内的任一点,立即可知这条轨线必是如图 8-13 所示的封闭轨线,同时它绝不会越出区间$[x'_1,x''_1]$.

这样,对于不同的 c 值($0<c\leqslant\varphi_m\psi_m$),方程(1)、(2)的解(4)式确定的轨线是一族以平衡点 P_0 为中心的封闭曲线,称闭轨线族. 当 c 由 $\varphi_m\psi_m$ 变小时闭轨线向外扩展.

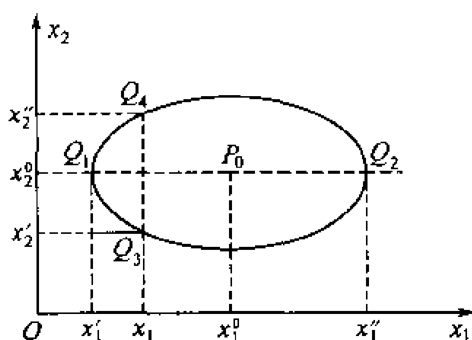


图 8－13　P_0 点和一条相轨线

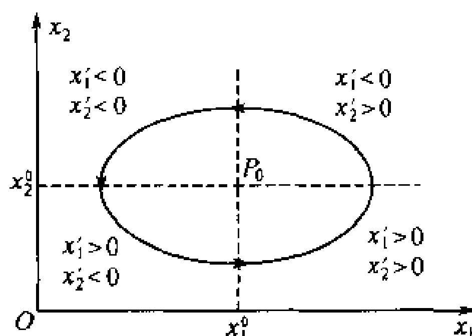


图 8－14　闭轨线族及其方向

闭轨线的方向很容易确定. 考察相平面上被 $x_1=x_1^0$ 和 $x_2=x_2^0$ 两条直线分成的 4 个区域内 $\frac{dx_1}{dt}$、$\frac{dx_2}{dt}$ 的正负. 由方程(1)、(2)可得如图 8－14 所示的结果,因而决定了闭轨线如箭头方向.

闭轨线对应着方程的周期解 $x_1(t)$、$x_2(t)$,记周期为 T,图 8－15 画出了周期解的示意图,其增减性是由图 8－14闭轨线的方向决定的.

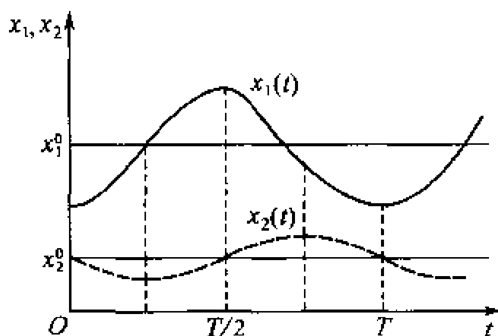


图 8－15

可以看出,食饵 $x_1(t)$ 的变化比捕食者 $x_2(t)$ 提前了 $\frac{1}{4}T$.

闭轨线(周期解)的存在说明 $P_0(x_1^0,x_2^0)$ 点不是(渐近)稳定的. $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别在 x_1^0 和 x_2^0 上下振动. 我们只能用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在一周期 T 内的平均值作为食饵和捕食者数量的近似度量. 记这两个平均值分别为 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$. 因为方程(2)可写作

$$x_1(t)=\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{x_2'}{x_2}+r_2\right)$$

所以容易由此算出 $x_1(t)$ 在 T 内的平均值(利用 $x_2(T)=x_2(0)$)

$$\bar{x}_1=\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,dt=\frac{r_2}{\lambda_2}$$

类似地可得 $\bar{x}_2=\frac{r_1}{\lambda_1}$,于是

$$\bar{x}_1=x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2},\quad \bar{x}_2=x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1}\tag{9}$$

这表明食饵和捕食者在平衡点 P_0 的值正好代表了它们的(平均)数量.

模型解释　(9)式表明,食饵的数量取决于捕食者方程(2)中的两个参数 r_2 和 λ_2,而捕食者

的数量取决于食饵方程(1)中的两个参数 r_1 和 λ_1. 当食饵的自然增长率 r_1 下降时,捕食者的数量将减少,这就是说,在弱肉强食情况下降低弱者的繁殖率可以使强者减少. 而当捕食者掠取食饵的能力 λ_1 提高时也会使捕食者减少. 另一方面,捕食者死亡率 r_2 的下降,或者食饵对捕食者供养能力 λ_2 的提高,都将导致食饵的减少.

为了用 Volterra 模型解释本节开头提出的战争期间捕获量下降对鲨鱼(捕食者)比对食用鱼(食饵)更有利的问题,需要在上述自然环境下所得的结果的基础上考虑人工捕获的影响(图 8-16).

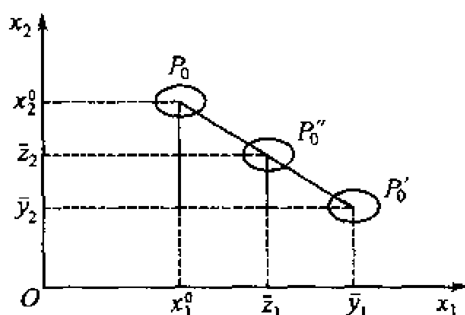


图 8-16 捕获系数的改变对食饵、捕食者数量的影响

设表示捕获能力的系数为 e,相当于食饵的自然增长率由 r_1 降为 r_1-e,捕食者的死亡率由 r_2 增为 r_2+e. 用 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 表示这种情况下食饵和捕食者的数量,平衡点由 P_0 变为 P_0',可以利用(3)式的结果得到 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的平均值为

$$\bar{y}_1=\frac{r_2+e}{\lambda_2},\quad \bar{y}_2=\frac{r_1-e}{\lambda_1}$$

战争期间捕获系数由 e 下降为 e_1,食饵 $z_1(t)$ 和捕食者 $z_2(t)$ 的平均值为

$$\bar{z}_1=\frac{r_2+e_1}{\lambda_2},\quad \bar{z}_2=\frac{r_1-e_1}{\lambda_1}$$

因为 $e_1<e$,所以显然有

$$\bar{z}_1<\bar{y}_1,\quad \bar{z}_2>\bar{y}_2$$

平衡点又变为 P_0''. 这就是说,战争时期捕获能力的下降使食用鱼(食饵)数量减少,而鲨鱼(捕食者)数量增加. Volterra 用他的模型解释了 D'Ancona 提出的问题.

下面针对一组具体的数据用 MATLAB 软件进行计算.

设食饵和捕食者的初始数量分别为 $x_1(0)=x_{10}$,$x_2(0)=x_{20}$. 对于数据 $r_1=1$,$\lambda_1=0.1$,$r_2=0.5$,$\lambda_2=0.02$,$x_{10}=25$,$x_{20}=2$,t 的终值经试验后确定为 15,以便于观察. 方程(1)和(2)成为以下形式:

$$\begin{cases}x_1'=x_1(1-0.1x_2)\\x_2'=x_2(-0.5+0.02x_1)\\x_1(0)=25,x_2(0)=2\end{cases}$$

首先,建立 M 文件 shier.m 如下:

```
function dx = shier(t,x)
dx = zeros(2,1);
dx(1) = x(1) * (1 - 0.1 * x(2));
dx(2) = x(2) * ( - 0.5 + 0.02 * x(1));
```

其次,输入以下命令:

```
[t,x] = ode45('shier',[0 15],[25 2]);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
plot(x(:,1),x(:,2))
```

得到数值解 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 的图形(图 8-17),其中,$x_1(t)$ 为实线;$x_2(t)$ 为"*"线. 相图 (x_1,x_2) 如图 8-18 所示.

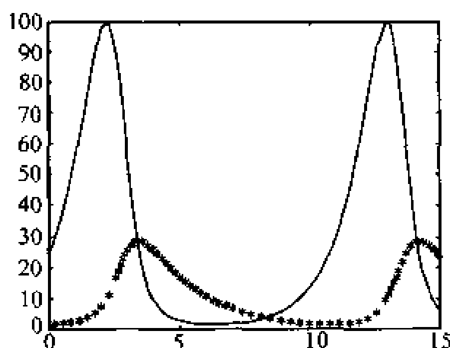


图 8-17

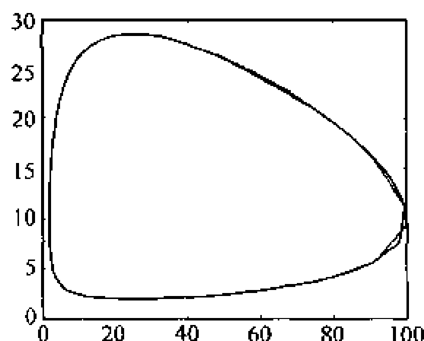


图 8-18

相图 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是封闭曲线,且从数值解可近似定出周期为 10.7. $x_1(t)$ 的最大值为 99.3,最小值为 2.0;$x_2(t)$ 的最大值为 28.4,最小值为 2.0. 求 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 在一个周期内的平均值得 $\bar{x}_1=25$,$\bar{x}_2=10$,与理论值相符.

考虑人工捕获时,设表示捕获能力的系数为 e,相当于食饵的自然增长率由 r_1 降为 r_1-e,捕食者的死亡率由 r_2 增为 r_2+e. 方程变为:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1[(r_1-e)-\lambda_1x_2]\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2[-(r_2+e)+\lambda_2x_1]\end{cases}$$

仍取 $r_1=1,\lambda_1=0.1,r_2=0.5,\lambda_2=0.02,x_1(0)=25,x_2(0)=2$.

设战前捕获能力系数 $e=0.3$,战争中降为 $e=0.1$,则战前与战争中的模型分别为:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1(0.7-0.1x_2)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2(-0.8+0.02x_1)\\ x_1(0)=25,x_2(0)=2\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1(0.9-0.1x_2)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2(-0.6+0.02x_1)\\ x_1(0)=25,x_2(0)=2\end{cases}$$

分别用 M 文件 shier1.m 和 shier2.m 定义上述两个方程,与 shier.m 类似.建立主程序 shark1.m,求解两个方程,并画出两种情况下鲨鱼数在鱼类总数中所占比例 $\dfrac{x_2(t)}{x_1(t)+x_2(t)}$.

shark1.m 如下:

```
[t1,x]=ode45('shier1',[0 15],[25 2]);
[t2,y]=ode45('shier2',[0 15],[25 2]);
x1=x(:,1);x2=x(:,2);
x3=x2./(x1+x2);
y1=y(:,1);y2=y(:,2);
y3=y2./(y1+y2);
```

```
plot(t1,x3,'-',t2,y3,'*')
```

运行 shark1.m,得图 8-19,其中,实线为战前的鲨鱼比例;“ * ”线为战争中的鲨鱼比例.可以看出:战争中鲨鱼的比例比战前高.

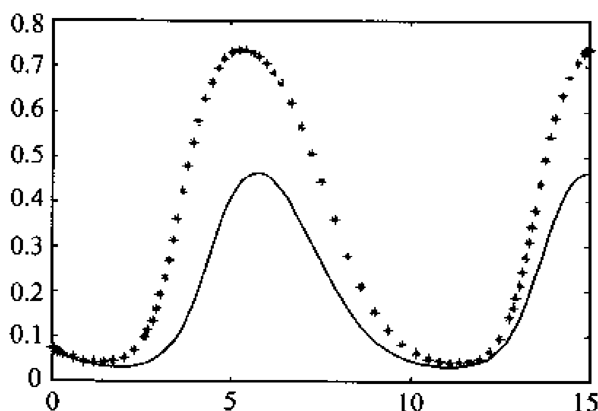


图 8-19

8.7 习 题

1. 设一容积为 V(单位:m^3)的大湖受到某种物质的污染,污染物均匀地分布在湖中.若从某时刻起污染源被切断,设湖水更新的速率是 r(单位:m^3/d).试建立求污染物浓度下降至原来的 5% 需要多少时间的数学模型.美国密西根湖的容积为 $4\ 871 \times 10^9\ m^3$,湖水的流量为 $3.663\ 959\ 132 \times 10^{10} m^3/d$,求污染中止后,污染物浓度下降到原来的 5% 所需要的时间.

2. 一个渔场中的鱼资源若不进行捕捞则按自限规律增长,若在渔场中由固定的船队进行连续作业,单位时间的产量与鱼场中鱼的数量成正比,比例系数为 k.试建立描述该渔场鱼的数量的数学模型,并讨论如何控制 k,使渔场的鱼资源保持稳定.

3. 医生给病人开处方的时候必须注明两点:服药的剂量和服药的时间间隔.超剂量的药品会对身体产生不良后果,甚至死亡,而剂量不足,则不能达到治病的目的.已知患者服药后,随时间推移,药品在体内逐渐被吸收,发生生化反应,也就是体内药品的浓度逐渐降低.药品浓度降低的速度与体内当时药品的浓度成正比.当服药量为 a,服药间隔为 T 时,试分析体内药品浓度随时间的变化规律.

4. 一个慢跑者在平面上沿着他喜欢的路径跑步,突然一只狗攻击他,这只狗以恒定速率跑向慢跑者,狗的跑动方向始终指向慢跑者,计算并画出狗跑动的轨迹.

5. 经济学家和社会学家一直很关心新产品的推销速度问题.试建立一个数学模型来描述它,并由此分析出一些有用的结果以指导生产.

6. 目前跳远的世界纪录是于 1991 年由迈克·鲍威尔跳出的 8.95 m,这是运动员们几十年不懈努力的结果.一般来说,每次的纪录都比上一个纪录略有进步,而在 1968 年的墨西哥奥运会上,鲍伯·比蒙却跳出了超出前纪录(8.35 m)的惊人成绩(8.90 m),足足多出 0.55 m,于是人

们不禁怀疑是否有外在因素帮助比蒙创造了纪录,1968 年奥运会是在海拔 2 600 m 的墨西哥城举行的,很自然人们就想到这种外在因素是该地的高海拔,认为稀薄的空气对运动员的阻力很小. 建立模型来论述这种解释是否合理.

第9章　差分方程

9.1　差分方程模型

把数列$\{a_n\}$中的a_n和前面的$a_i(0\leqslant i<n)$关联起来的方程叫做**差分方程**，差分方程也叫做**递推关系**.

例1　$a_n=a_{n-1}-na_{n-2}$，$a_n-3a_{n-1}=n$就是两个差分方程. 数列中的一些已知数称为**初始值**.

例2　$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+na_{n-2}\\ a_1=1,a_2=2\end{cases}$

其中，$a_1=1$，$a_2=2$就是初始值.

例3　汉诺塔问题：n个大小不同的圆盘依其半径大小依次套在桩A上，大的在下，小的在上(图9-1). 现要将此n个盘移到空桩B或C上，但要求一次只能移动一个盘且移动过程中，始终保持大盘在下，小盘在上. 移动过程中桩A也可利用. 设移动n个盘的次数为a_n，试建立关于a_n的差分方程.

解　先将A上的$n-1$个盘按题设要求移到C上，这需要移动a_{n-1}次，再将A上的最大盘移到B上，这需移动一次，最后将C上的$n-1$个盘按要求移到B上，这又需移动a_{n-1}次，于是得差分方程：

$$\begin{cases}a_n=2a_{n-1}+1\\ a_1=1\end{cases}$$

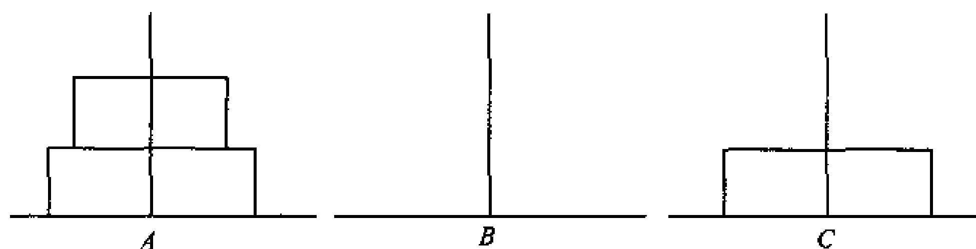


图9-1

例4　设第一月初有雌雄各一的一对小兔. 假定两月后长成成兔，同时(即第三月)开始每月初产雌雄各一的一对小兔，新增小兔也按此规律繁殖. 设第n月末共有F_n对兔子，试建立关于F_n的差分方程.

解　因第n月末的兔子包括两部分，一部分为上月留下的，另一部分为当月新生的，而由题设当月生的小兔数等于前月末的兔数，所以

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

F_n 定义为斐波那契(Fibonacci)数列.

例 5 在一个平面上有 n 个圆两两相交,但任三个圆无公共点. 设此 n 个圆将平面分为 a_n 个区域,试建立关于 a_n 的差分方程.

解 前 $n-1$ 个圆分平面为 a_{n-1} 个区域,第 n 个圆与前 $n-1$ 个两两相交,共交 $2(n-1)$ 个不同交点,这些点将第 n 个圆恰好分为 $2(n-1)$ 条弧,而每条弧又将所在的原来的区域一分为二,故加入第 n 个圆后新增 $2(n-1)$ 个区域,于是,差分方程为

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

9.2 差分方程的解法

本节主要介绍常系数线性差分方程的解法.

9.2.1 常系数线性齐次差分方程的解法

形如

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} = 0 \tag{1}$$

的差分方程,称为 $\{a_n\}$ 的 k 阶**常系数线性齐次差分方程**,其中 b_i 为常数,$b_k \neq 0, n \geqslant k$. 方程

$$x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k = 0 \tag{2}$$

称为差分方程(1)的**特征方程**,其根称为**特征根**.

例 1 二阶常系数线性差分方程 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,变形为 $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$,它的特征方程为

$$x^2 - x - 1 = 0$$

三阶常系数线性差分方程 $a_n + 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - a_{n-3} = 0$,它的特征方程为

$$x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

定理 1(单根) 差分方程 $a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} = 0, b_k \neq 0$ 的特征方程 $x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k = 0$ 有 k 个相异的特征根 $x_1, x_2, \cdots, x_k$,则 $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \cdots + c_k x_k^n$ 是一个通解,其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为任意常数. 且由一组初值条件

$$a_0 = u_0, \quad a_1 = u_1, \quad \cdots, \quad a_{k-1} = u_{k-1}$$

可确定一个满足初值条件的特解.

例 2 求斐波那契数列 $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$ 的通项.

解 差分方程的特征方程:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

特征根 $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 与 $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是互异的. 所以,通解

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

由初值条件 $F_1=1, F_2=1$,得

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

联立解出

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

故

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

定理 2(重根) 差分方程 $a_n + b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \cdots + b_ka_{n-k} = 0, b_k \neq 0$ 的特征方程 $x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k = 0$的相异特征根 $x_1, x_2, \cdots, x_t$,重数依次为 $m_1, m_2, \cdots, m_t, m_1+m_2+\cdots+m_t = k$,则差分方程的通解为

$$a_n = \sum_{j=1}^{m_1} c_{1j}n^{j-1}x_1^n + \sum_{j=1}^{m_2} c_{2j}n^{j-1}x_2^n + \cdots + \sum_{j=1}^{m_t} c_{tj}n^{j-1}x_t^n$$

例3 求解 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n=3,4\cdots$. 初值 $a_1=2, a_2=3$.

解 特征方程 $x^2-2x+1=0$. 特征根为 $x_1=x_2=1$. 因而通解

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot n \cdot 1^n = c_1 + nc_2$$

将 $a_1=2, a_2=3$ 代入,定出 $c_1=c_2=1$,故

$$a_n = 1 + n$$

例 4 求解 $a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4}, n=4,5,\cdots$. 初值 $a_0=1, a_1=0, a_2=1, a_3=2$.

解 特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$. 特征根为 $-1,-1,-1,2$. 因而通解为

$$a_n = (c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2)(-1)^n + c_4 \cdot 2^n$$

代入初值条件定出 $c_1=\frac{42}{52}, c_2=\frac{-29}{52}, c_3=\frac{7}{52}, c_4=\frac{10}{52}$,故

$$a_n = \frac{1}{52}(42-29n+7n^2)(-1)^n + \frac{10}{52} \cdot 2^n$$

定理 3 差分方程 $a_n + b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \cdots + b_ka_{n-k} = 0, b_k \neq 0$ 的特征方程 $x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k = 0$ 的特征根出现一对共轭复根 $x_1 = \delta + i\omega, x_2 = \delta - i\omega$ 和相异的 $k-2$ 个根$x_3, x_4, \cdots, x_k$,则差分方程的通解为

$$a_n = c_1\rho^n\cos n\theta + c_2\rho^n\sin n\theta + c_3x_3^n + \cdots + c_kx_k^n$$

其中 $\rho = \sqrt{\delta^2+\omega^2}, \theta = \arctan\frac{\omega}{\delta}$.

例 5 计算 n 阶行列式

$$a_n=\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&\cdots&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&\cdots&0&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1\end{vmatrix}$$

解 将 a_n 按第一列展开得

$$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\qquad(n\geqslant 3)$$

其中 $a_1=1,a_2=0$. 由特征方程 $x^2-x+1=0$ 解得

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$\rho=1,\quad\theta=\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}$$

$$a_n=c_1\cos\frac{n\pi}{3}+c_2\sin\frac{n\pi}{3}$$

将 $a_1=1,a_2=0$ 代入解出 $c_1=1,c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$,故

$$a_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

9.2.2 常系数线性非齐次差分方程的解法

定义 形如

$$a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\cdots+b_ka_{n-k}=f(n)$$
$$(b_1,\cdots,b_k\text{ 为常数},b_k\neq 0,f(n)\neq 0,n\geqslant k)$$

的差分方程为 k **阶常系数线性非齐次差分方程**.

常系数线性非齐次差分方程 $a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\cdots+b_ka_{n-k}=f(n)$ 对应的齐次差分方程为 $a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\cdots+b_ka_{n-k}=0$.

定理 4 非齐次差分方程的通解等于对应齐次差分方程的通解加上非齐次方程的特解,即

$$a_n=a_n^*+\overline{a_n}$$

其中 a_n^* 是对应齐次差分方程的**通解**,$\overline{a_n}$ 是非齐次差分方程的**特解**.

如何求非齐次差分方程的特解 $\overline{a_n}$,参照常微分非齐次方程的解法.

例 6 求非齐次差分方程 $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^n$ 的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程

$$x^2-4x+4=0$$

解得二重根 $x_1=x_2=2$,所以对应的齐次方程的通解为

$$a_n^*=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot n\cdot 2^n$$

由所给非齐次差分方程的右端,可以设其特解为

$$\overline{a_n} = A \cdot n^2 \cdot 2^n$$

将$\overline{a_n}$代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}$,故非齐次差分方程的通解为

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{2} n^2 \cdot 2^n$$

例 7 解具有初值条件 $a_0 = 3$ 的差分方程

$$a_n + 2a_{n-1} = n + 3$$

解 对应的齐次差分方程的特征方程为 $x + 2 = 0$,其通解 $a_n^* = A(-2)^n$. 由所给非齐次差分方程的右端,可以设其特解为

$$\overline{a_n} = B \cdot n + D$$

将其代入原非齐次差分方程中解出 $B = \frac{1}{3}, D = \frac{11}{9}$,故非齐次差分方程的通解为

$$a_n = A(-2)^n + \frac{n}{3} + \frac{11}{9}$$

由初值条件,可以定出 $A = \frac{16}{9}$.

有些非齐次差分方程还可以化为齐次差分方程求解.

例 8 求差分方程 $a_n - 2a_{n-1} = 3$ 的通解.

解 因为 $a_n - 2a_{n-1} = 3$,所以

$$a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3$$

两式相减得 $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$,其特征方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$,解得特征根 $x_1 = 1, x_2 = 2$,得通解 $a_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n$,将其代入原差分方程得 $c_1 = -3$,故最终得 $a_n = c_2 \cdot 2^n - 3$.

有时差分方程的特解还可以由观察法来得到.

例 9 求解汉诺塔问题:$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

解 对应的齐次方程的通解为 $a_n^* = A \cdot 2^n$,观察特解为$\overline{a_n} = -1$. 因为初值条件 $a_1 = 1$,故有解 $a_n = 2^n - 1$.

9.3 差分方程的平衡点及稳定性

9.3.1 一阶线性方程的平衡点及稳定性

一阶线性常系数差分方程

$$x_{k+1} + a x_k = b, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

的平衡点由 $x + ax = b$ 解得,为 $x^* = \frac{b}{1+a}$,当 $k \to \infty$ 时,若 $x_k \to x^*$,则平衡点 x^* 是稳定的,否则 x^* 是不稳定的.

容易看出,可以用变量代换方法将方程(1)的平衡点的稳定性问题转换为

$$x_{k+1} + ax_k = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{2}$$

的平衡点 $x^* = 0$ 的稳定性问题. 而对于方程(2),因为其解可表为

$$x_k = (-a)^k x_0, \quad k = 1,2,\cdots$$

所以当且仅当 $|a| < 1$ 时,方程(2)的平衡点(从而方程(1)的平衡点)才是稳定的.

对于 n 维向量 $\boldsymbol{x}(k)$ 和 $n \times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 构成的方程组

$$\boldsymbol{x}(k+1) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) = 0 \tag{3}$$

其平衡点稳定的条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征根 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots)$ 均有

$$|\lambda_i| < 1$$

即均在复平面上的单位圆内.

9.3.2 二阶线性差分方程的平衡点及稳定性

考察二阶线性差分方程

$$x_{k+2} + a_1 x_{k+1} + a_2 x_k = 0 \tag{4}$$

的平衡点($x^* = 0$)的稳定性. 为求(4)的通解,写出它的特征方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$,记它的根为 λ_1, λ_2,(4)的通解可表为

$$x_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \tag{5}$$

其中常数 c_1, c_2 由初值条件 x_0, x_1 确定. 由(5)立即得到,当且仅当

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1$$

时方程(4)的平衡点才是稳定的.

与一阶线性方程一样,非齐次方程

$$x_{k+2} + a_1 x_{k+1} + a_2 x_k = b \tag{6}$$

的平衡点的稳定性和方程(4)相同.

二阶方程的上述结果可以推广到 n 阶线性方程,即稳定平衡的条件是特征方程——n 次代数方程的根 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 均有 $|\lambda_i| < 1$. 考虑到高阶方程和方程组的相互转化,这个条件与方程(3)给出的结论是完全一致的.

9.3.3 一阶非线性差分方程

考察一阶非线性差分方程

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{7}$$

的平衡点的稳定性. 其平衡点 x^* 由代数方程 $x = f(x)$ 解出. 现分析 x^* 的稳定性,将方程(7)的右端在 x^* 点作泰勒展开,只取一次项,(7)式近似为

$$x_{k+1} = f'(x^*)(x_k - x^*) + f(x^*) \tag{8}$$

(8)是(7)的近似线性方程,x^* 也是(8)的平衡点. 线性方程(8)的平衡点的讨论与(1)相同,而当 $|f'(x^*)| \neq 1$ 时方程(7)与(8)平衡点的稳定性相同. 于是得到:

当 $|f'(x^*)| < 1$ 时,对于方程(7),x^* 是稳定的;

当 $|f'(x^*)| > 1$ 时,对于方程(7),x^* 是不稳定的.

9.4 建模案例:最优捕鱼策略

9.4.1 问题简介

生态学表明,对可再生资源的开发策略应在事先可持续收获的前提下追求最大经济效益.考虑具有4个年龄组:1龄鱼,…,4龄鱼的某种鱼.该鱼类在每年后4个月季节性集中产卵繁殖.而按规定,捕捞作业只允许在前8个月进行,每年投入的捕捞能力固定不变,单位时间捕捞量与各年龄组鱼群条数的比例称为捕捞强度系数.使用只能捕捞3、4龄鱼的13 mm网眼的拉网,其两个捕捞强度系数比为0.42:1.渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

该鱼群本身有如下数据:

1. 各年龄组鱼的自然死亡率为0.8(1/年),其平均质量分别为5.07,11.55,17.86,22.99(单位:g);

2. 1龄鱼和2龄鱼不产卵,产卵期间,平均每条4龄鱼产卵量为1.109×10^5(个),3龄鱼为其一半;

3. 卵孵化的成活率为$1.22\times10^{11}/(1.22\times10^{11}+n)$($n$为产卵总量);

有如下问题需要解决:

1) 分析如何实现可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群不变),并在此前提下得到最高收获量;

2) 合同要求某渔业公司在5年合同期满后鱼群的生产能力不能受到太大的破坏,承包时各年龄组鱼群数量为122,29.7,10.1,3.29($\times10^9$条),在固定努力量的捕捞方式下,问该公司应采取怎样的捕捞策略,才能使总收获量最高.

9.4.2 基本假设(略)

$X=(X_1\quad X_2\quad X_3\quad X_4)^T$——鱼群数向量.

α——单位时间的自然死亡率.

c——年存活率,$c=1-0.8=0.2$.

k——单位时间4龄鱼的捕捞强度系数.

β——孵化卵成活率,$\beta=1.22\times10^{11}/(1.22\times10^{11}+n)$.

m——4龄鱼的平均产卵量,m为1.109×10^5(个),3龄鱼为其一半.

9.4.3 模型建立

这里只讨论问题2),即可持续捕获策略模型.以一年为一个离散化的单位时间.

记年初鱼群为$X(t)=(X_1(t)\quad X_2(t)\quad X_3(t)\quad X_4(t))^T$,下一年的鱼群数为

$$X(t+1)=(X_1(t+1)\quad X_2(t+1)\quad X_3(t+1)\quad X_4(t+1))^T$$

显然,$X_i(t+1)$是$X_{i-1}(t)$到年底存活下来的鱼群数($i=1,2,3$,$i=4$时$X_4(t+1)$中还包括$X_4(t)$中存活数.$X_0(t)$指上一年由卵孵化而得到1龄鱼),据此可建立如下差分方程:

$$X_1(t+1)=\beta\left[\frac{m}{2}(c-k_3)X_3(t)+m(c-k_4)X_4(t)\right]$$

$$X_2(t+1)=cX_1(t)$$

$$X_3(t+1)=cX_2(t)$$

$$X_4(t+1)=(c-k_3)X_3(t)(c-k_4)X_4(t)$$

因为3龄鱼与4龄鱼捕捞强度系数比为0.42:1,故有 $k_3=0.42k_4=0.42k$,写成矩阵形式:

$$X(t+1)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{m}{2}\beta(c-0.42k) & m\beta(c-k)\\ c & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c-0.42k & c-k\end{bmatrix}$$

仔细考察矩阵 $\boldsymbol{P}$,当4龄鱼捕捞强度系数 $k>\frac{c}{0.42}=\frac{0.2}{0.42}=0.476$ 时,不论上一年鱼群数目如何,下一年的鱼群将出现负数.这个结论显然是荒谬的.事实上,只要3龄鱼和4龄鱼不被同时捕光,下一年4龄鱼存在存活,即鱼群数不会出现负数.

造成这种现象的原因是单位时间离散化程度不够精细.假设单位时间为一个月,定义月死亡率为 α,月存活率 $(1-\alpha)$,月捕捞系数为 k,则年存活率 $(1-\alpha)^{12}$ 应为 $c=0.2$,从而得 $\alpha=0.1255$.考虑一年中各月鱼群数目的分布,不难得到如下分析:

一个月实际存活率:$(1-\alpha-k)$

二个月实际存活率:$(1-\alpha-k)^2$

三个月实际存活率:$(1-\alpha-k)^3$

……

八个月实际存活率:$(1-\alpha-k)^8$

九个月实际存活率:$(1-\alpha-k)^8(1-\alpha)$——因只前八月捕捞,后四月只有自然死亡.

……

一年后实际存活率:$(1-\alpha-k)^8(1-\alpha)^4$

同理可得第 i 月捕捞率:$(1-\alpha-k)^{i-1}k,i=1,2,\cdots,8$.因此可得

一年后3龄鱼实际存活数:$(1-\alpha-k_3)^8(1-\alpha)^4X_3$

一年后4龄鱼实际存活数:$(1-\alpha-k_4)^8(1-\alpha)^4X_4$

该年3龄鱼总捕捞数 $\sum_{i=1}^{3}(1-\alpha-k_3)^{i-1}k_3X_3=\frac{k_3[1-(1-\alpha-k_3)^3]}{\alpha+k_3}\boldsymbol{X}_3$

该年4龄鱼总捕捞数 $\sum_{i=1}^{3}(1-\alpha-k_4)^{i-1}k_4X_4=\frac{k_4[1-(1-\alpha-k_4)^3]}{\alpha+k_4}X_4$

该年3龄鱼产卵总量:$n_3=\frac{m}{2}(1-\alpha-k_3)^8X_3$

该年4龄鱼产卵总量:$n_4=m(1-\alpha-k_4)^8X_4$

因此矩阵应当为：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{m}{2}\beta(1-\alpha-k_3)^3 & m\beta(1-\alpha-k_4)^3 \\ (1-\alpha)^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^4(1-\alpha-k_3)^3 & (1-\alpha)^4(1-\alpha-k_4)^3 \end{bmatrix}$$

关于鱼群的差分方程为：

$$X(t+1)=PX(t) \qquad (1)$$

为实现持续捕获(1)式，必须存在稳定解：

$$X(t)=PX(t)$$

由差分方程稳定性理论知其充要性为：对 P 的所有特征根 λ_i，有

$$|\lambda_i|\leqslant 1$$

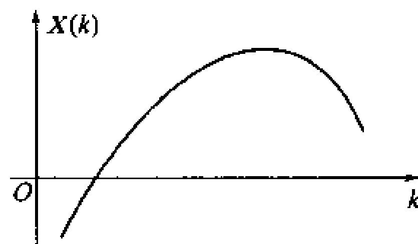


图 9－2

用 Mathematica 软件包按上述步骤得最优解如下：

$$\max: f=5.943\ 89\times 10^{10}\ g=59\ 438.9\ t$$

最佳月捕捞强度系数：4 龄鱼 $k_4=k=0.777\ 697$；3 龄鱼 $k_3=0.42k=0.321\ 95$；可持续最佳捕获下，渔场中各年龄组鱼群数：

$$X^*=(115.222\times 10^9\quad 23.044\ 4\times 10^9\quad 4.608\ 88\times 10^9\quad 2.211\ 49\times 10^7)$$

这说明该类鱼群不论开始鱼群数目如何，经过一定时间的持续捕获，总能使鱼群数目稳定下来，且在这种稳定生长的情形下，我们可用 Mathematica 软件给出捕获量 f 与月捕捞强度系数(4 龄鱼)k 的图形(图 9－2).

9.5 习　题

1. 某人上一共有 n 级台阶的楼梯. 如果规定他每步只能上一级台阶或 3 级台阶，问有多少种不同的上楼梯方法？

2. 只由 3 个字母 a,b,c 组成的长度为 n 的一些单词将在通信信道上传输. 传输中应满足条件：不得有两个 a 连续出现在任一单词中. 确定通信信道允许传输的单词的个数.

3. 平面上有 $n(n\geqslant 2)$ 个圆，任何两个圆都相交但无 3 个圆共点. 问这 n 个圆把平面划分成多少个不连通的区域？

4. 某人有 n 元钱，他每天买一次物品，每次买物品的品种很单调，或者买一元钱的甲物品，或者买二元钱的乙物品，问：他花完这 n 元钱有多少种不同的方式？

5. 蛛网模型：在自由贸易的集市上有这样的现象：一个时期由于猪肉的上市量大于需求，销售不畅导致价格下降，农民觉得养猪赔钱，于是转而经营其他农副产业，过段时间后猪肉上市量大减，供不应求导致价格上涨. 原来的饲养户看到有利可图，又重操旧业，这样下一个时期会重现供大于求、价格下降的局面. 在没有外界干预的情况下，这种现象将如此循环下去，试解释.

第10章 组合数学

计数问题是组合数学中研究得最多的内容,它出现在所有的数学分支中.事实上,差不多任何一门学科都要涉及计数问题.对于计算机科学来说,计数问题更具有特殊的意义.计算机科学需要研究算法,必须对算法所需的运算量和存储单元作出估计,即算法需要的时间复杂性和空间复杂性分析.在这一章里,我们先介绍两个一般性的原则——加法原则和乘法原则,然后提出几类最基本的计数问题,给出相应的计数公式.

10.1 排列与组合

10.1.1 两个基本计数原理

加法原则与乘法原则是组合数学中两个最基本的计算原理.

1. **加法原则** 若事件 A_1 有 m_1 种不同的进行方式,事件 A_2 有 m_2 种不同的进行方式,并且 A_1 和 A_2 是互不重叠、互不相交的,则事件 A_1 或事件 A_2 有 m_1+m_2 种进行方式.

例如,事件 $A_1=\{$大于0小于10的偶数$\}$,事件 $A_2=\{$大于0小于10的奇数$\}$,事件 $\{A_1$ 或 $A_2\}=\{$大于0小于10的整数$\}$.

用集合论的语言可将加法原则叙述成下述定理:

定理1 设 A,B 为有限集,$A\cap B=\varnothing$,则 $|A\cup B|=|A|+|B|$.

推论1 设 n 个有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$,则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$$

2. **乘法原则** 若事件 A_1 有 m_1 种不同的进行方式,事件 A_2 有 m_2 种不同的进行方式,则进行事件 A_1 接着进行事件 A_2 共有 m_1m_2 种进行方式.

例1 设从 A 到 B 有3条不同的道路,从 B 到 C 有2条不同的道路(图10-1),则从 A 经 B 到 C 的道路数为 $n=3\times2=6$.

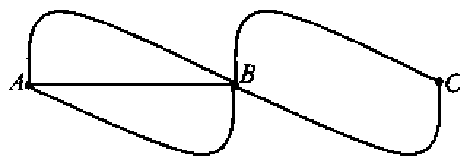


图 10-1

例2 某旅行社开辟从北京去长白山和天山2条旅游线,简称北线;从北京去西湖、黄山、峨嵋山3条旅游线,简称南线.问该旅行社共有多少条不同旅游路线?如某人选定了从北京去四川,先要在西安中转,北京到西安有3种航班可选,西安到四川又有2种航班可选,问共有多少种不同的航班配置方式?

解 第一个问题用加法原则,得到5条旅游路线.第二个问题用乘法原则,共有6种不同航行方式.

用集合论的语言可将乘法原则叙述成下述定理:

定理 2 设 A,B 为有限集. $|A|=m,|B|=n$,则 $|A\times B|=|A|\times|B|=mn$.

推论 2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个有限集合,则

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$$

例 3 从 5 位先生、6 位女士、2 位男孩和 4 位女孩中选取一位先生、一位女士、一位男孩和一位女孩,共有 $5\times6\times2\times4=240$ 种选法.

10.1.2 排列与组合

1. **无重集的排列数** 从 n 个不同元素中,任取 r 个元素按次序排成一列,称为从 n 个中取 r 的一个排列,其**排列数**记为 $\mathrm{P}(n,r)$.

$$\mathrm{P}(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

显然:(1) $\mathrm{P}(n,r)=0\quad(r>n)$;

(2) $\mathrm{P}(n,1)=n\quad(n\geqslant1)$;

(3) n 元集合的全排列 $\mathrm{P}(n,n)=n!$,规定 $0!=1$.

例 4 由数字 1,2,3,4,5 可构成多少个数字互不相同且 1 不在首位的三位数.

解 $\mathrm{P}(5,3)-\mathrm{P}(4,2)=60-12=48$.

例 5 将 a,b,c,d,e,f 进行排列,问使得字母 b 正好在字母 e 的左邻的排列有多少种?

解 在这些排列中,将 be 看作一个整体,原问题就变成求集合 $\{a,c,be,d,f\}$ 的全排列数,共有 $5!$ 种排列.

2. **无重集的组合数** 从 n 个不同元素中,任取 r 个元素放在一起,与次序无关,称为一个组合,其**组合数**记为 $\mathrm{C}(n,r)$.

$$\mathrm{C}(n,r)=\frac{\mathrm{P}(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

显然有:(1) $\mathrm{C}(n,0)=1,\mathrm{C}(n,n)=1$;

(2) $\mathrm{C}(n,r)=0\quad(r>n)$.

例 6 从 50 名同学中选 3 名作班委,共有几种选法?

解 $\mathrm{C}(50,3)=\dfrac{\mathrm{P}(50,3)}{3!}=50\times49\times48\div6=19\ 600$.

例 7 系里欲将 6 名保送研究生推荐给 3 个单位,每个单位 2 名,问有多少种方案?

解 有 $\mathrm{C}(6,2)\times\mathrm{C}(4,2)\times\mathrm{C}(2,2)=\dfrac{6!}{2!\ 2!\ 2!}=90$.

3. **n 元集取 r 元的圆排列** 从 n 个不同元中取 r 个围成一圈,称为 n 个取 r 的一个**圆排列**,其**排列数**记为 $k(n,r)$:

$$k(n,r)=\frac{\mathrm{P}(n,r)}{r}$$

这是因为 r 个不同线排列(一般排列),如 $1234\cdots r,234\cdots r1,345\cdots r12$,一一对应一个圆排列. 特别地,**$n$ 个元素的圆排列数为** $(n-1)!$.

例 8 4 个女生,4 个男生围圆桌而坐,男女相间,试问有多少不同的入座方式?

解　先让女生入座，有 $k(4,4)=\frac{P(4,4)}{4}=\frac{4!}{4}=6$ 种入座方式. 再让男生入座，则第一名男生有 4 种选择方式，第一名男生选定后，第二名男生有 3 种入座方式，类推. 由乘法原理得总入座方式

$$3!4! = 6\times 24 = 144 \text{ 种}$$

4. **n 元无限集的可重排列**　设 S 是 n 元的可重集，每元可无限次重复，$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$. 任取 r 个元的一个有序配置就是一个**可重排列**，则**可重排列数**为

$$U(n,r) = n^r$$

例9　数字 1,2,3,4,5 可构成多少个 3 维数，且 1 不在首位.

解　$U(5,3)-U(4,3)=5^3-4^3=61$.

5. **有限多重集的排列**　设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，则有限多重集的全排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}=\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$$

例10　将两面红旗，三面蓝旗，四面黄旗排成一排，问有多少种排法？

解　$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$ 种.

例 11　求图 10－2 中从 O 点到 A 点的不同路径数.

解　一条从 O 到 A 的路径对应着三个"↑"和四个"→"的一个全排列，且对应是一一对应的，所以从 O 到 A 的不同路径数为 $\frac{(3+4)!}{3!\cdot 4!}=35$ 种.

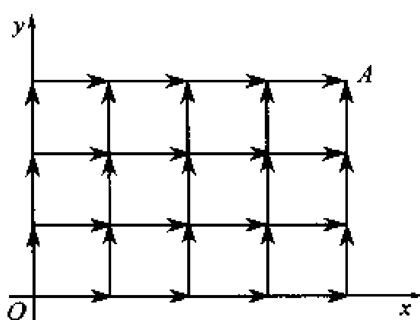


图 10－2

例 12　将 6 个蓝球，5 个红球，4 个白球，3 个黄球排成一行，要求黄球不挨着，问有多少种排列方式？

解　在构造题设的排列时，先将红、蓝、白三种球进行全排列，再将 3 个黄球插入其中. 令 $M=\{6\cdot b,5\cdot r,4\cdot w\}$，则 M 的排列数为 $\frac{15!}{6!\ 5!\ 4!}$. 在图 10－3 中，每个"＊"表示 M 的全排列中的一个元素，共有 15 个"＊"，则可以在 16 个"△"所示位置中选出 3 个插入 3 个黄球，共有 C(16,3) 种取法. 所以，共有 $\frac{15!}{6!\ 5!\ 4!}\cdot C(16,3)$ 种排列方法.

△ △ △ △ △ △　…　△ △ △　16 个
＊ ＊ ＊　…　＊ ＊　15 个

图 10－3

6. **n 元无限集可重组合**　从 n 个不同元中允许无限重复地取 r 个元进行组合 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$，称为 **$n$ 元可重－r 组合**，其组合数为 $C(n+r-1,r)$，记为 $F(n,r)$：

$$F(n,r) = C(n+r-1,r)$$

例13　食品店有三种月饼，第一种 3 个，第二、第三种多于 5 个，如果一盒装 6 个（盒内无

序),试问有多少种装法?

解 若第一种月饼也多于5个,则问题为3元可重-6组合问题,其组合数

$$N_1 = C(3+6-1,6) = C(8,6) = 28$$

设N_2代表第一种月饼至少装4个的三种月饼的装法数,这种装法可视为先在第一种月饼中取4个,再在三种月饼中可重复地取2个,故$N_2 = C(3+2-1,2) = C(4,2) = 6$. 于是所求数等于

$$N_1 - N_2 = 28 - 6 = 22$$

7. $S = \{\infty \cdot a_1, \cdots, \infty \cdot a_n\}$的$r$可重组合且每一种元至少在其上出现一次的组合数为$C(r-1, n-1)$ $(r \geq n)$.

例 14 r个相同的球(无标号),放入n个有区别(有标号)的盒内,不允许有空盒,问有多少种放法?

解 有$C(r-1,n-1)$种放法.

10.1.3 组合恒等式

以下组合恒等式在许多算法分析中起着重要的作用.

(1) $C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n$

(2) $C(n,0) + C(n,2) + C(n,4) + \cdots = C(n,1) + C(n,3) + C(n,5) + \cdots$

(3) $1 \cdot C(n,1) + 2 \cdot C(n,2) + \cdots + n \cdot C(n,n) = n \cdot 2^{n-1}$

(4) $C(0,k) + C(1,k) + \cdots + C(n,k) = C(n+1,k+1)$

(5) $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$

(6) $\sum_{i=0}^{m} C(m,i) \cdot C(n,r+i) = C(m+n,m+r)$

10.2 鸽巢原理与容斥原理

在求解计数问题时,用间接计数的方法往往比直接计数来得容易,这节将讨论计数时常用的间接计数方法——鸽巢原理与容斥原理.

10.2.1 鸽巢原理

鸽巢原理又称抽屉原理,是组合数学的基本原理之一. 它是组合论中一些存在性问题的基本而又有力的工具,最早是狄利克雷(Dirichlet)提出的. 这个原理指出"有$n+1$只鸽子飞进n个鸽子巢,则至少有一个鸽子巢内至少有两只鸽子".

例 1 一年365天,今有366人,则其中至少有两人生日相同.

例 2 30个班,31人,则至少有两个人在同一个班.

例 3 证明:在边长为2的正方形内任意放置五个点,则其中必有两点,其距离不超过$\sqrt{2}$.

证 将此正方形分为四个相等的小正方形,于是将五个点放入大正方形内等价于将五个点放入四个小正方形内,于是这两点的距离不会超过小正方形的对角线长$\sqrt{2}$.

例 4 证明:对任意给定的m个整数$a_1, a_2, \cdots, a_m$,必存在k和$l(0 \leq k \leq l \leq m)$,使得$a_{k+1} +$

$a_{k+2}+\cdots+a_l$ 能被 m 整除.

证 考虑 $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_m$，若这些和式中有一个能被 m 整除，则结论成立，否则这 m 个和式被 m 整除后都有一个非零余数，即余数为 $1,2,\cdots,m-1$ 中的一个. 由鸽巢原理，必有两个和式除以 m 的余数相同，设这两个和式分别为

$$a_1+a_2+\cdots+a_k,\quad a_1+a_2+\cdots+a_l,\quad k<l$$

其相同的余数为 r，即

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=a\cdot m+r$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_l=b\cdot m+r$$

a,b 为整数，上两式相减，得

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l=(b-a)\cdot m$$

即 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 能被 m 整除.

10.2.2 容斥原理

容斥原理(逐步淘汰原理)是计数的一种基本方法. 这一原理在概率论与数论中常被使用.

设 A,B 为两个集合，易知 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 的元素个数

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

将此公式推广.

定理1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合，则

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|\\&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\\&\quad\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

设 $\bar{A}$ 表示补集，N 表示元素的个数，则

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|&=|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}|\\&=N-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|\\&=N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+\\&\quad\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

特别地，$n=3$ 时，有

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=N-|A_1|-|A_2|-|A_3|\\&\quad+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|\\&\quad-|A_1\cap A_2\cap A_3|\end{aligned}$$

例5 用下面的方式来漆十二个球：两个球不漆；两个球漆成红色，一个球漆成蓝色，一个球漆成白色；两个球漆成红色和蓝色，一个球漆成红色和白色；三个球漆成红色、蓝色和白色. 问漆有红色的球有几个？没有漆颜色的球有几个？

解 分别用 a_1,a_2,a_3 来表示一个球漆成红色、蓝色和白色，于是

$$N(a_1)=8 \quad N(a_2)=6 \quad N(a_3)=5$$
$$N(a_1a_2)=5 \quad N(a_1a_3)=4 \quad N(a_2a_3)=3 \quad N(a_1a_2a_3)=3$$

可推得

$$N(\overline{a_1}\cap\overline{a_2}\cap\overline{a_3})=12-8-6-5+5+4+3-3=2$$

故漆有红色的球有 8 个，没有漆颜色的球有 2 个.

例 6 求 1 到 1000 的整数中，不能被 5、6 和 8 任一个整除的数的个数.

解 令

$$S=\{1,2,\cdots,1000\}$$
$$A_1=\{i \mid i\in S \text{ 且 } i \text{ 能被 5 整除}\}$$
$$A_2=\{i \mid i\in S \text{ 且 } i \text{ 能被 6 整除}\}$$
$$A_3=\{i \mid i\in S \text{ 且 } i \text{ 能被 8 整除}\}$$

于是有

$$|A_1|=\left[\frac{1000}{5}\right]=200 \text{ 个}$$

$$|A_2|=\left[\frac{1000}{6}\right]=166 \text{ 个}$$

$$|A_3|=\left[\frac{1000}{8}\right]=125 \text{ 个}$$

$$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{1000}{5\times 6}\right]=33 \text{ 个}$$

$$|A_1\cap A_3|=\left[\frac{1000}{5\times 8}\right]=25 \text{ 个}$$

$$|A_2\cap A_3|=\left[\frac{1000}{\operatorname{lcm}(6,8)}\right]=\left[\frac{1000}{24}\right]=41 \text{ 个}$$

其中，lcm(6,8)表示 6 与 8 的最小公倍数，又

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\left[\frac{1000}{\operatorname{lcm}(5,6,8)}\right]=\left[\frac{1000}{120}\right]=8 \text{ 个}$$

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|\\&=1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8\\&=600\end{aligned}$$

即 1 到 1000 的整数中不能被 5,6,8 任一个整除的数有 600 个.

例 7 某学校有 12 位教师，已知教数学课的教师有 8 位，教物理课的教师有 6 位，教化学课的教师有 5 位. 其中，有 5 位教师兼教数学和物理，有 4 位教师兼教数学和化学，有 3 位教师兼教物理和化学，还有 3 位教师兼教这 3 门课. 试问：

(1) 教数、理、化以外的课的教师有几位?

(2) 只教数、理、化中的一门课的教师有几位?

(3) 正好教数、理、化中两门课的教师有几位?

解 令 12 位教师中教数学课的教师属于集合 A_1，教物理课的教师属于集合 A_2，教化学课的教师属于集合 A_3，则有

$$|A_1| = 8, |A_2| = 6, |A_3| = 5$$
$$|A_1 \cap A_2| = 5$$
$$|A_1 \cap A_3| = 4$$
$$|A_2 \cap A_3| = 3$$

(1) 不教数学、物理、化学课的教师数目为 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= 12 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 12 - (8 + 6 + 5) + (5 + 4 + 3) - 3 = 2\end{aligned}$$

(2) 只教数、理、化中的一门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(1) &= |\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - 2(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= (8 + 6 + 5) - 2 \times (5 + 4 + 3) + 3 \times 3 = 4\end{aligned}$$

(3) 正好教数、理、化中两门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(2) &= (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 5 + 4 + 3 - 3 \times 3 = 3\end{aligned}$$

10.2.3 错排问题

问题 1 在一次集会中，有 n 个人寄存他们的帽子，问有多少种交还他们帽子的方式，使没有一个人得到他自己的帽子？

问题 2 有 n 封信和 n 个写好地址的信封，问没有一封信装入它本身该装入的信封的方式有多少种？

两个问题都可归结为：求 $1,2,3,\cdots,n$ 的全排列，使没有一个数在其自然位置上的排列个数 D_n.

定理 2 对 $n \geqslant 1$，有

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

证 设 S 为 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列构成的集合，A_i 为 i 在第 $i(i = 1,2,\cdots,n)$ 位上的 $1,2,\cdots,n$的全排列构成的集合，则

$$\begin{aligned}D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\ &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= |S| - C(n,1)|A_1| + C(n,2)|A_1 \cap A_2| + \\ &\quad \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \cdots + (-1)^n\end{aligned}$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

例 8 有禁止模式的排列问题：多重集合 $M=\{4\cdot x,3\cdot y,2\cdot z\}$ 的全排列中不出现 $xxxx$，yyy，zz 的模式的排列有多少？

解 令 S 为 M 的全排列全体，则有 $|S|=\dfrac{9!}{4!\ 3!\ 2!}$，定义性质集合 $P=\{P_1,P_2,P_3\}$，其中：

P_1：全排列中出现 $xxxx$ 模式

P_2：全排列中出现 yyy 模式

P_3：全排列中出现 zz 模式.

用 A_i 分别表示 S 中具有性质 P_i 的全排列全体 $(1\leqslant i\leqslant n)$. A_1 中的全排列出现模式为 $xxxx$，将 $xxxx$ 看作一个字符，则 A_1 中的全排列就是多重集合 $M=\{4\cdot x,3\cdot y,2\cdot z\}$ 的全排列，所以

$$|A_1|=\frac{6!}{1!3!2!},|A_2|=\frac{7!}{4!1!2!},|A_3|=\frac{8!}{4!3!1!}$$

$$|A_1\cap A_2|=\frac{4!}{1!1!2!},|A_1\cap A_3|=\frac{5!}{1!3!1!},|A_2\cap A_3|=\frac{6!}{4!1!1!}$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\frac{3!}{1!1!1!}$$

由容斥原理知，满足条件的排列个数为：

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)\\&\quad+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)\\&\quad-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=\frac{9!}{4!3!2!}-\left(\frac{6!}{3!2!}+\frac{7!}{4!2!}+\frac{8!}{4!3!}\right)+\left(\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{4!}\right)-3!=871\end{aligned}$$

10.3 母 函 数

母函数是组合论中的一个重要内容，主要思想是将数列转化为函数来讨论.

10.3.1 普通母函数

1. 定义 1 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为一实数列，记为 $\{a_n\}$，函数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为该数列的**普通母函数**，简称**母函数**.

例 1 证明 $\dfrac{1}{1-x}$ 是数列 $1,1,1,\cdots,1,\cdots$ 的母函数.

证 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1.$

同理可证 $(1+x)^n$ 是 $C(n,0),C(n,1),\cdots,C(n,n),\cdots$ 的母函数，这是因为

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{\infty}C(n,i)x^i$$

2. 一些组合问题的母函数

(1) n 个不同元的无限可重 r 组合,其组合数 $C(n+r-1,r)=\binom{n+r-1}{r}$,该数列的母函数为

$$(1+x+x^2+\cdots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}$$

(2) n 个不同元,允许重复度依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,即 $S=\{\lambda_1A_1,\lambda_2A_2,\cdots,\lambda_nA_n\}$,从中取 r 个可重组合数为 a_r,则 a_r 的母函数为

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{\lambda_1})(1+x+x^2+\cdots+x^{\lambda_2})\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{\lambda_n})$$

例 2 设有2个红球,3个白球,1个黑球和1个黄球,求从这些球中取出5个的不同方案数?

解 设从所给球中取出 i 个的不同方案为 a_i,则数列 $\{a_i\}$ 的母函数

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x)^2\\=&1+4x+8x^2+\cdots+8x^5+4x^6+x^7\end{aligned}$$

故取出5个的不同方案数为8.

例 3 求用1元和2元的钞票支付 n 元钱的不同方式数?

解 设所求方式数为 a_n,则 $\{a_n\}$ 的母函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x+x^2+\cdots)\left[1+(x^2)+(x^2)^2+(x^2)^3+\cdots\right]\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1$$

两边求导,得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{4}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3+(-1)^n}{4}x^n\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$

当 $n=3$ 时,$a_3=2$,即支付3元钱有两种方式.

当 $n=5$ 时,$a_5=3$,即支付5元钱有三种方式.

(3) n 个不同元,每个元至少取一次的可重 r 组合数($r=n,n+1,\cdots$)的母函数为

$$(x+x^2+\cdots)^n=\frac{x^n}{(1-x)^n}$$

(4) 从 a,b 两个元中允许重复地取 r 个元，但要求含偶数个 a，奇数个 b 的组合数的母函数为

$$(x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$$

而

$$\frac{1}{(1-x^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$$

$$\frac{x}{(1-x^2)^2}=x(1+2x^2+3x^4+4x^6+5x^8+\cdots)$$
$$=x+2x^3+3x^5+4x^7+5x^9+\cdots+(n+1)x^{2n+1}$$

所以

$$a_r=\frac{r+1}{2}$$

10.3.2 指数型母函数

定义 2 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为一实数列，函数 $f(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots$ 称为该数列的**指数型母函数，简称指母函数.**

例 4 从 n 个不同元中取 r 个的排列数 $P(n,r)$ 的指母函数为

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{\infty}C_n^r x^r=\sum_{r=0}^{\infty}P(n,r)\frac{x^r}{r!}$$

例 5 n 个不同元的可重 r 排列 $(r=0,1,\cdots)$ 的指母函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n=e^{nx}=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}$$

幂级数型的母函数适用于处理组合计数方面问题，指数型母函数适用于处理排列计数方面的问题.

例 6 求 1 与 2 均出现偶数次的由 1,2,3,4,5 五个数字组成的 n 位数的个数.

解 设满足条件的 n 位数的个数为 a_n，则 $\{a_n\}$ 的指母函数为

$$f(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

后两式相加除 2，得

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\cdot e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x})$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+3^n+1)\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3^n+1)$$

例7 有 n 颗人造钻石排成一行用来制造项链，今用红、黄、蓝、白、黑对其涂色，每颗只涂其中一色，如要求红色有偶数颗，问有多少种不同涂法？

解 这是与次序有关的排列问题，设有 b_n 种涂法，$\{b_n\}$ 的指母函数为

$$f(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^4$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\cdot e^{4x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(5^n+3^n)\cdot\frac{x^n}{n!}$$

故

$$b_n=\frac{1}{2}(5^n+3^n)$$

特别地，当 $n=3$ 时，有 $b_3=76$ 种涂法.

下面举一个综合实例.

例8(截断切割中的最优排列问题) 从一个长方体加工出一个尺寸与位置预定的长方体(这个长方体的对立表面是平行的)，通常要经过六次截断切割. 设水平切割单位面积的费用是垂直切割的 f_1 倍，且当先后二次垂直切割的平面(不管它们之间是否穿插水平切割)不平行时，因调整刀具需额外费用 f_c. 讨论有多少种费用不同的切割方式.

① 设这六个面分别位于左、右、前、后、上、下，可将它们相应编号为1、2、3、4、5、6，这样一个切割方式就可以表示为加工面{1、2、3、4、5、6}的一个排列，这种排列的全体记为 A，共有 $6!=720$ 种不同切割方式.

② 由于相邻两个平面的次序交换下不影响总费用，例如切割方式{4、1、6、2、5、3}和切割方式{1、4、6、2、5、3}，所以，对任意尺寸和位置的待加工长方体和成品长方体，其加工费用都相等. 那么只要考虑其中一种切割方式就行了. 这样需要考虑的不同的切割方式的总数就是所有加工费用可能不同的切割方式的总数，记为 N，则考虑这 N 种切割方式的加工费用后，一定不会漏掉任何一种加工费用不同的切割方式.

用 β 表示切割方式，$\beta=\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\}$(其中 i_k 表示第 k 次切割的面的编号)，它反映了切割的先后顺序. 设

$$P=\{\beta\mid\beta\text{中4与1相邻且4在1前面}\}$$
$$Q=\{\beta\mid\beta\text{中5与2相邻且5在2前面}\}$$
$$R=\{\beta\mid\beta\text{中6与3相邻且6在3前面}\}$$

因

$$|P| = |Q| = |R| = P_5^5$$
$$|P \cap Q| = |Q \cap R| = |P \cap R| P_4^4$$
$$|P \cap Q \cap R| = P_3^3$$

由容斥原理有

$$\begin{aligned} N &\leqslant |A| - |\overline{P \cup Q \cup R}| \\ &= P_6^6 - |P| - |Q| - |R| + |P \cap Q| + |Q \cap R| + |P \cap R| - |P \cap Q \cap R| \\ &= 426 \end{aligned}$$

得到 N 的上界为 426.

在给定的一组初值的情况下，求出了 426 种各不相同的加工费用值. 说明至少要考虑 426 种切割方式，即 $N \geqslant 426$，所以 $N = 426$.

③ 考虑切割面 k 离开相应边界面的距离 h_k，把它称为切割厚度. 不失一般性，可以假设：

$$h_1 \geqslant h_2, \quad h_3 \geqslant h_4, \quad h_5 \geqslant h_6 \tag{1}$$

当(1)式不成立时，假设 $h_1 < h_2$，则把左右次序交换一下便可，其余可类似处理. 在(1)式成立时，只需考虑 P_6^6 的一个子集，即只考虑 1 在 2 前、3 在 4 前、5 在 6 前的那些排列；该子集的规模为 $\frac{720}{2^3} = 90$.

10.4 习 题

1. 有多少个能被 3 整除而又不含数字 6 的三位数？

2. 今安排 7 人入住某宾馆的 5 个房间，每个房间至少安排 1 人，有多少种不同的安排住宿的方法？

3. 甲、乙两人竞选厂长，甲、乙分别得到 a 张和 b 张选票($a > b$)，问在点票过程中甲的得票恒领先于乙的情形有多少种？

4. 10 个节目中有 6 个演唱、4 个舞蹈. 今编写节目单，要求任意两个舞蹈之间至少有一个演唱，问可编写出多少种不同的演出节目单？

5. 在宴会后，7 位男士检查他们的帽子，问有多少种方法使得

(1) 没有人接到自己的帽子？

(2) 至少有一个人接到自己的帽子？

(3) 至少两个人接到自己的帽子？

6. 求由 3 只绿球、2 只红球、2 只白球和 3 只黄球做成的没有两个黄球相邻的全排列的个数.

7. 用 $m(m \geqslant 2)$ 种颜色去涂 $1 \times n(n \geqslant 2)$ 的棋盘，每格涂一种颜色，相邻格子异色，首末两格也异色，求不同的涂色方法数.

第 11 章　最短路问题

11.1　图论的基本概念

11.1.1　图的概念

1. 图的定义

定义 1　(1)有序三元组 $G=(V,E,\Psi)$ 称为一个**图**. 其中:

① $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是有穷非空集,称为**顶点集**,其中的元素叫做图 G 的**顶点**.

② E 称为**边集**,其中的元素叫做图 G **的边**.

③ Ψ 是从边集 E 到顶点集 V 中的有序或无序的元素偶对的集合的映射,称为**关联函数**.

(2) 在图 G 中,与 V 中的有序偶(v_i,v_j)对应的边 e,称为图的**有向边**(或弧),而与 V 中顶点的无序偶 v_iv_j 相对应的边 e,称为图的**无向边**. 每一条边都是无向边的图,叫做**无向图**;每一条边都是有向边的图,称为**有向图**;既有无向边又有有向边的图称为**混合图**.

(3) 若将图 G 的每一条边 e 都对应一个实数 $w(e)$,则称 $w(e)$ 为该边的**权**,并称图 G 为**赋权图**.

规定用记号 ν 和 ε 分别表示图的顶点数和边数.

例 1　设无向图 $G=(V,E,\Psi)$,其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$,$\Psi(e_1)=v_1v_2$,$\Psi(e_2)=v_1v_3$,$\Psi(e_3)=v_1v_4$,$\Psi(e_4)=v_1v_4$,$\Psi(e_5)=v_4v_4$. G 的图解如图 11-1 所示.

常用术语:

(1) 端点相同的边称为**环**.

(2) 若一对顶点之间有两条以上的边联结,则这些边称为**重边**.

(3) 有边联结的两个顶点称为**相邻的顶点**,有一个公共端点的边称为**相邻的边**.

(4) 边和它的端点称为互相**关联**的.

(5) 既没有环也没有重边的图,称为**简单图**.

(6) 任意两顶点都相邻的简单图,称为**完备图**,记为 K_n,其中 n 为顶点的数目.

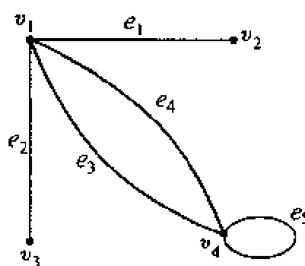


图 11-1

(7) 若 $V=X\cup Y$,$X\cap Y=\varnothing$,X 中任两顶点不相邻,Y 中任两顶点不相邻,称 G 为**二元图**;若 X 中每一顶点皆与 Y 中一切顶点相邻,称为**完备二元图**,记为 $K_{m,n}$,其中 m,n 分别为 X 与 Y 的顶点数目.

2. 顶点的次数

定义 2　(1)在无向图中,与顶点 v 关联的边的数目(环算两次)称为 v 的**次数**,记为 $d(v)$.

(2)在有向图中,从顶点 v 引出的边的数目称为 v 的**出度**,记为 $d^+(v)$,从顶点 v 引入的边的数目称为 v 的**入度**,记为 $d^-(v)$. $d(v)=d^+(v)+d^-(v)$ 称为 v 的**次数**.

定理 1 $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2\varepsilon(G)$.

这是很显然的,因为每出现一条边,顶点的总次数就增加 2.

推论 1 任何图中奇次顶点的总数必为偶数.

3. 子图

定义 3 设图 $G=(V,E,\Psi)$, $G_1=(V_1,E_1,\Psi_1)$,

(1) 若 $V_1\subseteq V$, $E_1\subseteq E$,且当 $e\in E_1$ 时, $\Psi_1(e)=\Psi(e)$,则称 G_1 是 G 的**子图**. 特别地,若 $V_1=V$,则 G_1 称为 G 的**生成子图**.

(2) 设 $V_1\subseteq V$,且 $V_1\neq\varnothing$,以 V_1 为顶点集、两个端点都在 V_1 中的图 G 的边为边集的图 G 的子图,称为 G 的**由 V_1 导出的子图**,记为 $G[V_1]$.

(3) 设 $E_1\subseteq E$,且 $E_1\neq\varnothing$,以 E_1 为边集,E_1 的端点集为顶点集的图 G 的子图,称为 G **的由 E_1 导出的子图**,记为 $G[E_1]$.

例 2 在图 G 中,由顶点集 $\{v_1,v_4,v_5\}$ 导出的子图为 $G[\{v_1,v_4,v_5\}]$,由边集 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 导出的子图为 $G[\{e_1,e_2,e_3\}]$,见图 11-2.

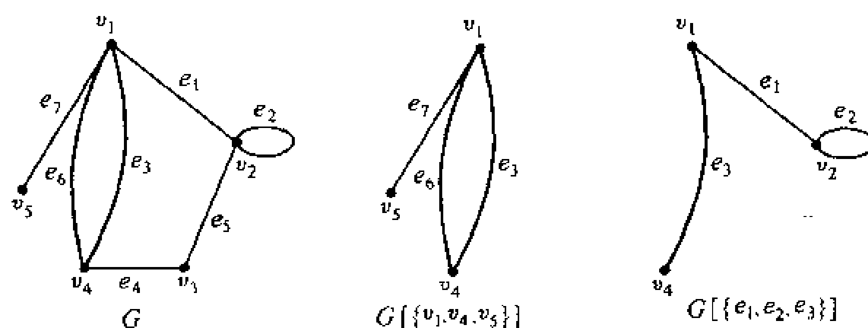


图 11-2

11.1.2 图的矩阵表示

本节均假设图为简单图.

1. 关联矩阵

对无向图 G,其关联矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{\nu\times\varepsilon}$,其中:

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 相关联}\\ 0, & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联}\end{cases}$$

对有向图 G,其关联矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{\nu\times\varepsilon}$,其中:

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点}\\ -1, & \text{若 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点}\\ 0, & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联}\end{cases}$$

2. 邻接矩阵

对无向图 G,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ v_i\ 与\ v_j\ 相邻\\ 0, & 若\ v_i\ 与\ v_j\ 不相邻\end{cases}$$

对有向图 $G=(V,E)$,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若(v_i,v_j)\in E\\ 0, & 若(v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

对有向赋权图 G,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij}, & 若(v_i,v_j)\in E,且\ w_{ij}\ 为其权\\ 0, & 若\ i=j\\ \infty, & 若(v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

无向赋权图的邻接矩阵可类似定义.

对图 11－3 中的图,其关联矩阵和邻接矩阵分别为:

$$M=\begin{array}{c}\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{matrix}\end{array}\qquad A=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{matrix}\end{array}$$

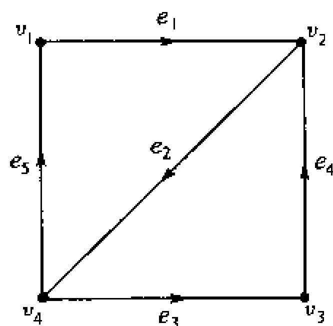


图 11－3

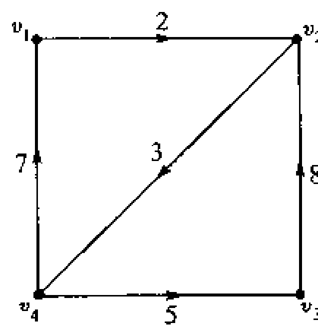


图 11－4

对图 11－4 中的有向赋权图,其邻接矩阵为:

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 2 & \infty & \infty\\ \infty & 0 & \infty & 3\\ \infty & 8 & 0 & \infty\\ 7 & \infty & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{matrix}\end{array}$$

11.2 最短路问题及其算法

11.2.1 基本概念

定义 1 在无向图 $G=(V,E,\Psi)$ 中：

(1) 顶点与边相互交错且 $\Psi(e_i)=v_{i-1}v_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的有限非空序列 $w=(v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k)$ 称为一条从 v_0 到 v_k 的**通路**，记为 $W_{v_0v_k}$.

(2) 边不重复但顶点可重复的通路称为**道路**，记为 $T_{v_0v_k}$.

(3) 边与顶点均不重复的通路称为**路径**，记为 $P_{v_0v_k}$.

定义 2 (1) 任意两点均有路径的图称为**连通图**.

(2) 起点与终点重合的路径称为**圈**.

(3) 连通而无圈的图称为**树**.

如在图 11-5 中，通路 $W_{v_1v_4}=v_1e_4v_4e_5v_2e_1v_1e_4v_4$

道路 $T_{v_1v_4}=v_1e_1v_2e_5v_4e_6v_2e_2v_3e_3v_4$

路径 $P_{v_1v_4}=v_1e_1v_2e_5v_4$

圈 $v_1e_1v_2e_5v_4e_4v_1$

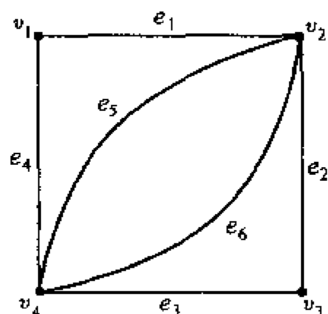


图 11-5

定义 3 (1) 设 $P(u,v)$ 是赋权图 G 中从 u 到 v 的路径，则称 $w(P)=\sum_{e\in E(P)}w(e)$ 为路径 P 的权.

(2) 在赋权图 G 中，从顶点 u 到顶点 v 的具有最小权的路 $P^*(u,v)$，称为 u 到 v 的**最短路**.

11.2.2 固定起点的最短路

最短路有一个重要而明显的性质：最短路是一条路径，且最短路的任一段也是最短路. 假设在 u_0-v_0 的最短路中只取一条，则从 u_0 到其余顶点的最短路将构成一棵以 u_0 为根的树. 因此可采用树生长的过程来求指定顶点到其余顶点的最短路. 实现这一过程的方法是 Dijkstra 算法.

设 G 为赋权有向图或无向图，G 边上的权均非负.

Dijkstra 算法：求 G 中从顶点 u_0 到其余顶点的最短路.

S：具有永久标号的顶点集.

对每个顶点，定义两个标记 $(l(v),z(v))$，其中：

$l(v)$：表示从顶点 u_0 到 v 的一条路的权.

$z(v)$：v 的父亲点，用以确定最短路的路线.

算法的过程就是在每一步改进这两个标记，使最终 $l(v)$ 为从顶点 u_0 到 v 的最短路的权. 输入为带权邻接矩阵 W.

(1) 赋初值：令 $S=\{u_0,l(u_0)=0\}$. $\forall v\in\overline{S}=V\backslash S$，令 $l(v)=W(u_0,v)$，$z(v)=u_0$，$u\leftarrow u_0$.

(2) 更新 $l(v)$，$z(v)$：$\forall v\in\overline{S}=V\backslash S$，若 $l(v)>l(u)+W(u,v)$，则令

$$l(v)=l(u)+W(u,v),\quad z(v)=u$$

(3) 设 v^* 是使 $l(v)$ 取最小值的 $\overline{S}$ 中的顶点，则令 $S=S\cup\{v^*\}$，$u\leftarrow v^*$.

(4) 若 $S \neq \varnothing$,转(2);否则,停止.

用上述算法求出的 $l(v)$ 就是 u_0 到 v 的最短路的权,从 v 的父亲点标记 $z(v)$ 追溯到 u_0,就得到 u_0 到 v 的最短路的路线.

例 1　求图 11-6 中从顶点 u_0 到其余顶点的最短路.

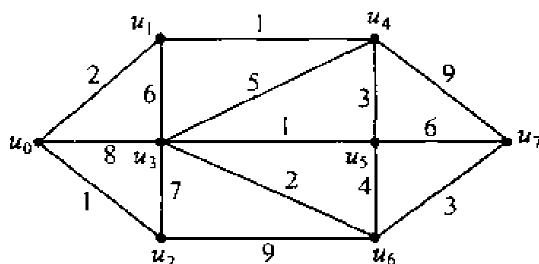


图 11-6

解　先写出带权邻接矩阵:

$$
W = \begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 & 0 & \infty & 6 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
 & & 0 & 7 & \infty & \infty & 9 & \infty \\
 & & & 0 & 5 & 1 & 2 & \infty \\
 & & & & 0 & 3 & \infty & 9 \\
 & & & & & 0 & 4 & 6 \\
 & & & & & & 0 & 3 \\
 & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

因 G 是无向图,故 W 是对称矩阵.

Dijkstra 的算法步骤如下:

迭代次数	$l(u_j)$							
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		2	$\boxed{1}$	8	∞	∞	∞	∞
3		$\boxed{2}$		8	∞	∞	10	∞
4				8	$\boxed{3}$	∞	10	∞
5				8		$\boxed{6}$	10	12
6				$\boxed{7}$			10	12
7							$\boxed{9}$	12
8								$\boxed{12}$
最后标记:$l(v)$	0	2	1	7	3	6	9	12
$z(v)$	u_0	u_0	u_0	u_5	u_1	u_4	u_3	u_4

从第二个标记 $z(v)$ 向前追溯,即得以 u_0 为根的树(图 11-7).

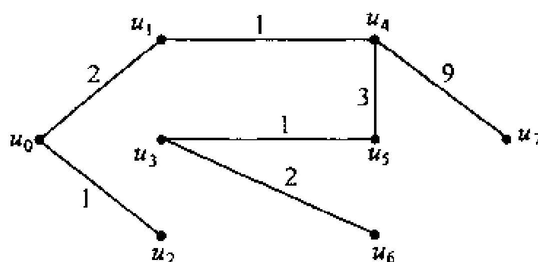


图 11-7

用 MATLAB 编程 road1.m 如下：

```
w=[0  2  1  8  inf  inf  inf  inf;
2  0  inf  6  1  inf  inf  inf;
1  inf  0  7  inf  inf  9  inf;
8  6  7  0  5  1  2  inf;
inf  1  inf  5  0  3  inf  9;
inf  inf  inf  1  3  0  4  6;
inf  inf  9  2  inf  4  0  3;
inf  inf  inf  inf  9  6  3  0]
n=size(w,1);
w1=w(1,:);

for i=1:n
      l(i)=w1(i);
      z(i)=1;
end
s=[];
s(1)=1;
u=s(1);
k=1
l
z

while k<n
       for i=1:n
       for j=1:k
       if i~=s(j)
          if l(i)>l(u)+w(u,i)
             l(i)=l(u)+w(u,i);
             z(i)=u;
          end
       end
       end
end
l
z

ll=l;
for i=1:n
    for j=1:k
```

```
            if i ~ = s(j)
               ll(i) = ll(i);
            else
                ll(i) = inf;
            end
        end
    end

    lv = inf;
    for i = 1: n
        if ll(i) < lv
           lv = ll(i);
           v = i;
        end
    end
    lv;
    v;
    s(k + 1) = v;
    k = k + 1;
    u = s(k);

    end
    l
    z
```

运行 road1.m,得:

```
    l    =0   2   1   7   3   6   9   12
    z    =1   1   1   6   2   5   4    5
```

11.2.3 每对顶点之间的最短路

求每对顶点之间最短路的算法是 Floyd 算法.

1. 算法的基本思想

直接在图的带权邻接矩阵中用插入顶点的方法依次构造出 ν 个矩阵 $\boldsymbol{D}^{(1)}$、$\boldsymbol{D}^{(2)}$、…、$\boldsymbol{D}^{(\nu)}$,使最后得到的矩阵 $\boldsymbol{D}^{(\nu)}$ 成为图的距离矩阵,同时也求出插入点矩阵以便得到两点间的最短路径.

2. 算法原理

(1) 求距离矩阵的方法

把带权邻接矩阵 $\boldsymbol{W}$ 作为距离矩阵的初值,即 $\boldsymbol{D}^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})_{\nu\times\nu}=\boldsymbol{W}$.

① $\boldsymbol{D}^{(1)}=(d_{ij}^{(1)})_{\nu\times\nu}$,其中 $d_{ij}^{(1)}=\min\{d_{ij}^{(0)},d_{i1}^{(0)}+d_{1j}^{(0)}\}$,$d_{ij}^{(1)}$是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1 作为中间点的路径中最短路的长度.

② $\boldsymbol{D}^{(2)}=(d_{ij}^{(2)})_{\nu\times\nu}$,其中 $d_{ij}^{(2)}=\min\{d_{ij}^{(1)},d_{i2}^{(1)}+d_{2j}^{(1)}\}$,$d_{ij}^{(2)}$是从 v_i 到 v_j 的只允许以v_1、v_2作为中间点的路径中最短路的长度.

……

ν $\boldsymbol{D}^{(\nu)}=(d_{ij}^{(\nu)})_{\nu\times\nu}$,其中 $d_{ij}^{(\nu)}=\min\{d_{ij}^{(\nu-1)},d_{i\nu}^{(\nu-1)}+d_{\nu j}^{(\nu-1)}\}$,$d_{ij}^{(\nu)}$是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1、v_2、…、v_ν 作为中间点的路径中最短路的长度. 即是从 v_i 到 v_j 中间可插入任何顶点的路径中最短路的长度,因此 $\boldsymbol{D}^{(\nu)}$ 即是距离矩阵.

(2) 求路径矩阵的方法

在建立距离矩阵的同时可建立路径矩阵 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{\nu\times\nu}$, r_{ij}的含义是从 v_i 到 v_j 的最短路要经过点号为 r_{ij}的点.

$$\boldsymbol{R}^{(0)}=(r_{ij}^{(0)})_{\nu\times\nu},\quad r_{ij}^{(0)}=j$$

每求得一个 $\boldsymbol{D}^{(k)}$时,按下列方式产生相应的新的 $\boldsymbol{R}^{(k)}$:

$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases}k, & 若\ d_{ij}^{(k-1)}>d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\\ r_{ij}^{(k-1)}, & 否则\end{cases}$$

即当 v_k 被插入任何两点间的最短路径时,被记录在 $\boldsymbol{R}^{(k)}$中,依次求 $\boldsymbol{D}^{(\nu)}$时求得 $\boldsymbol{R}^{(\nu)}$,可由 $\boldsymbol{R}^{(\nu)}$来查找任何点对之间最短路的路径.

(3) 查找最短路路径的方法

若 $r_{ij}^{(\nu)}=p_1$,则点 p_1 是点 i 到点 j 的最短路的中间点,然后用同样的方法再分头查找.若:

① 向点 i 追溯得:$r_{ip_1}^{(\nu)}=p_2, r_{ip_2}^{(\nu)}=p_3,\cdots,r_{ip_k}^{(\nu)}=p_k$

② 向点 j 追溯得:$r_{p_1j}^{(\nu)}=q_1, r_{q_1j}^{(\nu)}=q_2,\cdots,r_{q_mj}^{(\nu)}=j$

则由点 i 到 j 的最短路的路径为:$i,p_k,\cdots,p_2,p_1,q_1,q_2,\cdots,q_m,j$.

3. 算法步骤

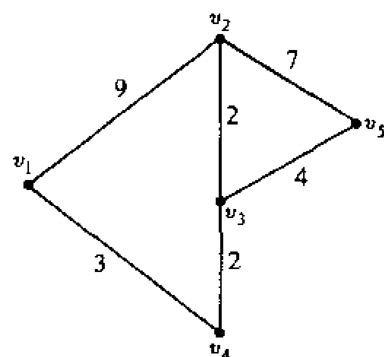


图 11-8

Floyd 算法:求任意两点间的最短路.

$D(i,j)$:i 到 j 的距离.

$R(i,j)$:i 到 j 之间的插入点.

输入带权邻接矩阵 $\boldsymbol{W}$,

(1) 赋初值:对所有 i,j, $d(i,j)\leftarrow w(i,j)$, $r(i,j)\leftarrow j$, $k\leftarrow 1$.

(2) 更新 $d(i,j)$, $r(i,j)$:对所有 i,j,若 $d(i,k)+d(k,j)<d(i,j)$,则

$$d(i,j)\leftarrow d(i,k)+d(k,j),\quad r(i,j)\leftarrow k$$

(3) 若 $k=\nu$,停止;否则 $k\leftarrow k+1$,转(2).

例 2 求图 11-8 中加权图的任意两点间的距离与路径.

解

$$\boldsymbol{D}^{(0)}=\begin{bmatrix}0&9&\infty&3&\infty\\9&0&2&\infty&7\\\infty&2&0&2&4\\3&\infty&2&0&\infty\\\infty&7&4&\infty&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(0)}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

插入 v_1,得:

$$\boldsymbol{D}^{(1)}=\begin{bmatrix}0&9&\infty&3&\infty\\9&0&2&\underline{\underline{12}}&7\\\infty&\underline{\underline{2}}&0&2&4\\3&\underline{\underline{\infty}}&2&0&\infty\\\infty&7&4&\infty&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&\underline{\underline{1}}&5\\1&2&3&4&5\\1&\underline{\underline{1}}&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

矩阵中带“$\underline{\underline{\quad}}$”的项为经迭代比较以后有变化的元素，即需引入中间点 v_1，从而 $\boldsymbol{R}^{(1)}$ 中相应的位置换为 1.

插入 v_2，得：

$$\boldsymbol{D}^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 9 & \underline{\underline{11}} & 3 & \underline{\underline{16}}\\ 9 & 0 & 2 & 12 & 7\\ \underline{\underline{11}} & 2 & 0 & 2 & 4\\ 3 & 12 & 2 & 0 & \underline{\underline{19}}\\ \underline{\underline{16}} & 7 & 4 & \underline{\underline{19}} & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 2 & \underline{\underline{2}} & 4 & \underline{\underline{2}}\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5\\ \underline{\underline{2}} & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 3 & 4 & \underline{\underline{2}}\\ \underline{\underline{2}} & 2 & 3 & \underline{\underline{2}} & 5\end{bmatrix}$$

插入 v_3，得：

$$\boldsymbol{D}^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 9 & 11 & 3 & \underline{\underline{15}}\\ 9 & 0 & 2 & \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{6}}\\ 11 & 2 & 0 & 2 & 4\\ 3 & \underline{\underline{4}} & 2 & 0 & \underline{\underline{6}}\\ \underline{\underline{15}} & \underline{\underline{6}} & 4 & \underline{\underline{6}} & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4 & \underline{\underline{3}}\\ 1 & 2 & 3 & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{3}}\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & \underline{\underline{3}} & 3 & 4 & \underline{\underline{3}}\\ \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{3}} & 3 & \underline{\underline{3}} & 5\end{bmatrix}$$

插入 v_4，得：

$$\boldsymbol{D}^{(4)}=\begin{bmatrix}0 & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{5}} & 3 & \underline{\underline{9}}\\ \underline{\underline{7}} & 0 & 2 & 4 & 6\\ \underline{\underline{5}} & 2 & 0 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6\\ \underline{\underline{9}} & 6 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(4)}=\begin{bmatrix}1 & \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{4}} & 4 & \underline{\underline{4}}\\ \underline{\underline{4}} & 2 & 3 & 3 & 3\\ \underline{\underline{4}} & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3\\ \underline{\underline{4}} & 3 & 3 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{(5)}=\boldsymbol{D}^{(4)},\qquad \boldsymbol{R}^{(5)}=\boldsymbol{R}^{(4)}$$

从 $\boldsymbol{D}^{(5)}$ 中得各顶点间的最短路，从 $\boldsymbol{R}^{(5)}$ 中可追溯出最短路的路径. 例如，从 $\boldsymbol{D}^{(5)}$ 中得 $d_{51}^{(5)}=9$，故从 v_5 到 v_1 的最短路为 9. 从 $\boldsymbol{R}^{(5)}$ 中得 $r_{51}^{(5)}=4$. 由 v_4 向 v_5 追溯：$r_{54}^{(5)}=3$，$r_{53}^{(5)}=3$；由 v_4 向 v_1 追溯：$r_{41}^{(5)}=1$. 所以从 v_5 到 v_1 的最短路径为：

$$5\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1$$

对本问题，用 MATLAB 编程 road2.m 和 floyd.m 如下. 其中主程序为 road2.m.

```
% road2.m
a=[0  9  inf  3  inf;9  0  2  inf  7;
inf  2  0  2  4;3  inf  2  0  inf;
inf  7  4  inf  0];
[D,R]=floyd(a)

% floyd.m
function[D,R]=floyd(a)
n=size(a,1);
D=a
```

```
for i =1: n
    for j =1: n
      R(i,j) =j;
    end
end
R

for k =1: n
    for i =1: n
        for j =1: n
            if D(i,k) +D(k,j) <D(i,j)
               D(i,j) =D(i,k) +D(k,j);
               R(i,j) =R(i,k);
            end
        end
    end
    k
    D
    R
end
```

运行程序 road2 .m,得:

```
D =
      0     7     5     3     9
      7     0     2     4     6
      5     2     0     2     4
      3     4     2     0     6
      9     6     4     6     0
R =
      1     4     4     4     4
      4     2     3     3     3
      4     2     3     4     5
      1     3     3     4     3
      4     3     3     3     5
```

11.3 最短路的应用

11.3.1 可化为最短路问题的多阶段决策问题

对于最优化问题中的多阶段决策问题,常可用动态规划来处理.它的特点是先将一个复杂的问题分解成相互联系的若干阶段,每个阶段即为一个小问题,然后逐个处理.一旦每一个阶段的决策确定后,整个过程的决策也随之确定.但动态规划不存在一种标准的数学形式,可以说动态规划的使用是一种艺术,需要根据不同的实际问题列出相应的动态规划递推关系式,再求解递推关系,而不同的递推关系式有不同的解法,没有一个统一的程序.对某些多阶段决策问题,要写出其动态规划递推关系式难度很大.而图论中的最短路问题是一个多阶段决策问题,它可以用现成

的 Dijkstra 算法求解. 因此,对某些较复杂的多阶段决策问题,可以通过构造适当的图,将它转化成最短路问题,从而使问题变得清晰、直观. 而一旦转化成功,剩下的就只是用标准的 Dijkstra 算法程序求解了.

要将一个多阶段决策问题化为最短路问题,关键在于对该问题构造出相应的图,使图的顶点、边、权分别对应于该问题的某些要素,从而图中某些顶点间的最短路就对应于该问题的解. 有时对同一问题可以构造出不同的图. 下面通过一个实例来说明构造图的方法.

例 1(设备更新问题)　企业使用一台设备,每年年初,企业领导就要确定是购置新的,还是继续使用旧的. 若购置新设备,就要支付一定的购置费用;若继续使用,则需支付一定的维修费用. 现要制定一个五年之内的设备更新计划,使得五年内总的支付费用最少.

已知该种设备在每年年初的价格为:

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

使用不同时间设备所需维修费为:

使用年限	0~1	1~2	2~3	3~4	4~5
维修费	5	6	8	11	18

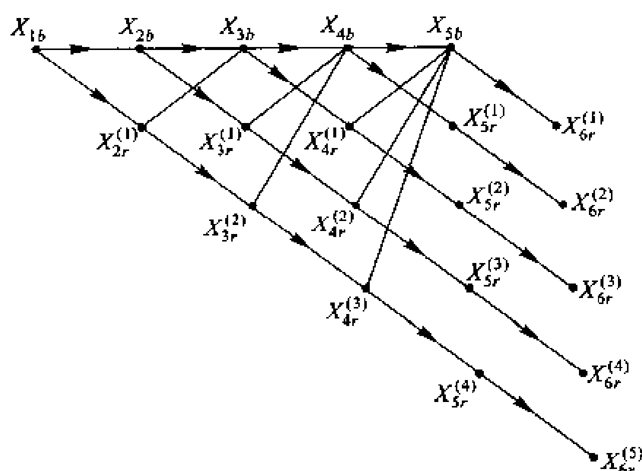


图 11-9　$G1(V,E)$

对此问题,构造加权有向图 $G1(V,E)$,如图 11-9 所示.

$G1(V,E)$ 的含义为:

(1) 顶点集 $V=\{X_{ib}, i=1,2,3,4,5\}\cup\{X_{ir}^{(k)}, i=2,3,4,5,6; k=1,2,\cdots,i-1\}$, 每个顶点代表年初的一种决策,其中顶点 X_{ib} 代表第 i 年初购置新设备的决策,顶点 $X_{ir}^{(k)}$ 代表第 i 年初修理用过 k 年的旧设备的决策.

(2) 弧集 $E=\{(X_{ib},X_{i+1,b}),(X_{ir}^{(k)},X_{i+1,b}), i=1,2,3,4; k=1,2,\cdots,i-1\}\cup\{(X_{ib},X_{i+1,r}^{(1)}), i=1,2,3,4,5\}\cup\{(X_{ir}^{(k)},X_{i+1,r}^{(k+1)}), i=2,3,4,5; k=1,2,\cdots,i-1\}$.

若第 i 年初作了决策 X_i 后,第 $i+1$ 年初可以作决策 X_{i+1},则顶点 X_i 与 X_{i+1} 之间有弧

(X_i, X_{i+1})，其权 $W(X_i, X_{i+1})$ 代表第 i 年初到第 $i+1$ 年初之间的费用. 例如，弧 $(X_{3b}, X_{4r}^{(1)})$ 代表第三年初买新设备，第四年初决定用第三年买的用过一年的旧设备，其权则为第三年初的购置费与三、四年间的维修费之和，即 12 + 5 = 17.

(3) 问题转化为顶点 X_{1b} 到 $X_{6r}^{(k)}$ 的最短路问题. 五年的最优购置费为

$$\min_{k=1,2,3,4,5} \{ d(X_{1b}, X_{6r}^{(k)}) \}$$

其中 $d(X_{1b}, X_{6r}^{(k)})$ 为顶点 X_{1b} 到 $X_{6r}^{(k)}$ 的最短路的权. 求得最短路的权为 53，而两条最短路分别为

$$X_{1b} - X_{2r}^{(1)} - X_{3r}^{(2)} - X_{4b} - X_{5r}^{(1)} - X_{6r}^{(2)}$$

$$X_{1b} - X_{2r}^{(1)} - X_{3b} - X_{4r}^{(1)} - X_{5r}^{(2)} - X_{6r}^{(3)}$$

因此，计划为第一、三年初购置新设备，或第一、四年初购置新设备，五年费用均最省，为 53.

此问题也可构造如图 11 - 10 所示的加权有向图 $G2(V,E)$.

$G2(V,E)$ 的含义是：

(1) 顶点集 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$，其中，$v_i$ 表示第 i 年 $(i = 1,2,\cdots,5)$ 初购置新设备的决策，v_6 表示第五年底.

(2) 弧集 $E = \{(v_i, v_j), i = 1,2,3,4,5;\ i < j \leqslant 6\}$，弧 (v_i, v_j) 表示第 i 年初购进一台设备一直使用到第 j 年初的决策，其权 $W(v_i, v_j)$ 表示由这一决策在第 i 年初到第 j 年初的总费用，如 $W(v_1, v_4) = 11 + 5 + 6 + 8 = 30$.

(3) 问题转化为求 v_1 到 v_6 的最短路问题，求得两条最短路为 $v_1 - v_4 - v_6$，$v_1 - v_3 - v_6$，权为 53，与图 $G1(V,E)$ 的解相同.

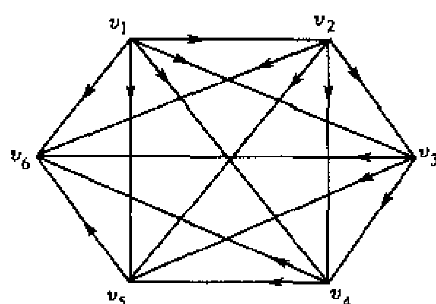


图 11 - 10 $G2(V,E)$

11.3.2 选址问题

选址问题是指为一个或几个服务设施在一定区域内选定它的位置，使某一指标达到最优值. 选址问题的数学模型依赖于设施可能的区域和评判位置优劣的标准，有许多不同类型的选址问题. 在此只简单介绍服务设施与服务对象都位于一个图的顶点上的单服务设施问题.

1. 中心问题

有些公共服务设施(例如一些紧急服务型设施如急救中心、消防站等)的选址，要求网络中最远的被服务点离服务设施的距离尽可能小.

例 2 某城市要建立一个消防站，为该市所属的七个区服务(图 11 - 11). 问：应设在哪个区，才能使它至最远区的路径最短.

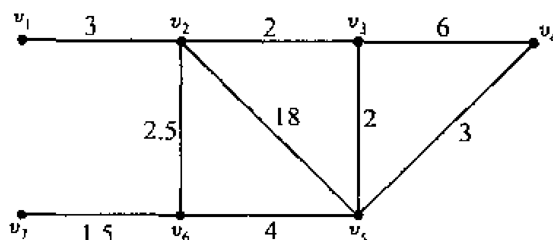


图 11 - 11

算法：

（1）用 Floyd 算法求出距离矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{\nu\times\nu}$.

（2）计算在各点 v_i 设立服务设施的最大服务距离 $S(v_i)$：

$$S(v_i) = \max_{1\leqslant j\leqslant \nu}\{d_{ij}\}, \quad i = 1,2,\cdots,\nu$$

（3）求出顶点 v_k，使 $S(v_k)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant \nu}\{S(v_i)\}$，则 v_k 就是要求的建立消防站的地点. 此点称为图的中心点.

对此问题，用 MATLAB 编写主程序 road3.m 如下：

```
a=[0  3  inf  inf  inf  inf  inf;3  0  2  inf  18  2.5  inf;...
   inf  2  0  6  2  inf  inf;inf  inf  6  0  3  inf  inf;...
   inf  18  2  3  0  4  inf;inf  2.5  inf  inf  4  0  1.5;...
   inf  inf  inf  inf  inf  1.5  0];[D,R]=floyd(a)
```

运行 road3.m（需调用前面介绍的 floyd.m），得结果：

```
D =
      0         3.0000    5.0000    10.0000   7.0000    5.5000    7.0000
      3.0000    0         2.0000    7.0000    4.0000    2.5000    4.0000
      5.0000    2.0000    0         5.0000    2.0000    4.5000    6.0000
     10.0000    7.0000    5.0000    0         3.0000    7.0000    8.5000
      7.0000    4.0000    2.0000    3.0000    0         4.0000    5.5000
      5.5000    2.5000    4.5000    7.0000    4.0000    0         1.5000
      7.0000    4.0000    6.0000    8.5000    5.5000    1.5000    0
R =
     1     2     2     2     2     2     2
     1     2     3     3     3     6     6
     2     2     3     5     5     2     2
     5     5     5     4     5     5     5
     3     3     3     4     5     6     6
     2     2     2     5     5     6     7
     6     6     6     6     6     6     7
```

故得：$S(v_1)=10$，$S(v_2)=7$，$S(v_3)=6$，$S(v_4)=8.5$，$S(v_5)=7$，$S(v_6)=7$，$S(v_7)=8.5$，因 $S(v_3)=6$ 为最小，故应将消防站设在 v_3 处.

2. 重心问题

有些设施（例如一些非紧急型的公共服务设施，如邮局、学校等）的选址，要求设施到所有服务对象点的距离总和最小. 一般要考虑人口密度问题，要使全体被服务对象来往的平均路程最短.

例 3 某矿区有七个矿点（图 11－12）. 已知各矿点每天的产矿量 $q(v_j)$（标在图 11－12 的各顶点上）. 现要从这七个矿点选一个来建造矿厂. 问应选在哪个矿点，才能使各矿点所产的矿运到选矿厂所在地的总运力（单位：kt/km）最小.

算法：

（1）求距离阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{\nu\times\nu}$.

（2）计算各顶点作为选矿厂的总运力 $m(v_i)$：

$$m(v_i) = \sum_{j=1}^{\nu} q(v_j)\times d_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,\nu$$

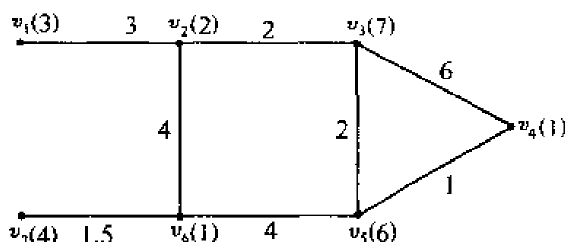


图 11－12

(3) 求 v_k,使 $m(v_k)=\min\limits_{1\le i\le \nu}\{m(v_i)\}$,则 v_k 就是选矿厂应设之矿点.此点称为图 G 的**重心**或**中位点**.

11.4 建模案例:最优截断切割问题

11.4.1 问题

从一个长方体中加工出一个已知尺寸、位置预定的长方体(这两个长方体的对应表面是平行的),通常要经过6次截断切割.设水平切割单位面积的费用是垂直切割单位面积费用的 r 倍.且当先后两次垂直切割的平面(不管它们之间是否穿插水平切割)不平行时,因调整刀具需额外费用 e.试设计一种安排各面加工次序(称"切割方式")的方法,使加工费用最少.

11.4.2 假设

1. 假设水平切割单位面积的费用为 r,垂直切割单位面积费用为1;
2. 当先后两次垂直切割的平面(不管它们之间是否穿插水平切割)不平行时,调整刀具需额外费用 e;
3. 第一次切割前,刀具已经调整完毕,即第一次垂直切割不加人刀具调整费用;
4. 每个待加工长方体都必须经过6次截断切割.

11.4.3 模型的建立与求解

设待加工长方体的左右面、前后面、上下面间的距离分别为 a_0、b_0、c_0.六个切割面分别位于左、右、前、后、上、下,将它们相应编号为 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6,这六个面与待加工长方体相应外侧面的边距分别为 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5、u_6.这样,一种切割方式就是六个切割面的一个排列,共有 $P_6^6=720$ 种切割方式.当考虑到切割费用时,显然有局部优化准则:两个平行待切割面中,边距较大的待切割面总是先加工.

由此准则,只需考虑

$$\frac{P_6^6}{2!\times 2!\times 2!}=90$$

种切割方式.即在求最少加工费用时,只需在90个满足准则的切割序列中考虑.不失一般性,设 $u_1\geqslant u_2$,$u_3\geqslant u_4$,$u_5\geqslant u_6$,故只考虑 M_1 在 M_2 前、M_3 在 M_4 前、M_5 在 M_6 前的切割方式.

1. $e=0$ 的情况

为简单起见,先考虑 $e=0$ 的情况.构造如图11－13所示的一个有向赋权网络图 $G(V,E)$.为

了表示切割过程的有向性，在网络图上加上坐标轴 x,y,z.

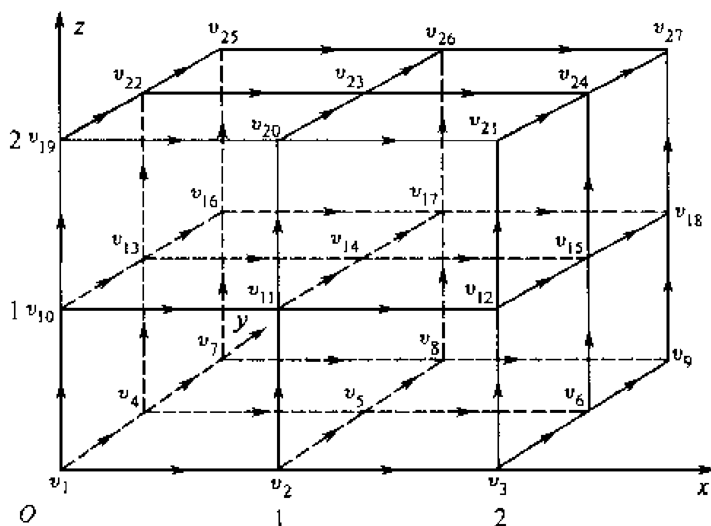


图 11 - 13 $G(V,E)$

图 $G(V,E)$ 的含义为：

(1) 空间网络图中每个结点 $v_i(x_i,y_i,z_i)$ 表示被切割石材所处的一个状态. 顶点坐标 x_i、y_i、z_i 分别代表石材在左右、前后、上下方向上已被切割的刀数. 例如：$v_{24}(2,1,2)$ 表示石材在左右方向上已被切割两刀，前后方向上已被切一刀，上下方向上已被切两刀，即面 M_1、M_2、M_3、M_5、M_6 均已被切割. 顶点 $v_1(0,0,0)$ 表示石材的最初待加工状态，顶点 $v_{27}(2,2,2)$ 表示石材加工完成后的状态.

(2) G 的弧 (v_i,v_j) 表示石材被切割的一个过程，若长方体能从状态 v_i 经一次切割变为状态 v_j，即当且仅当 $x_i+y_i+z_i+1=x_j+y_j+z_j$ 时，$v_i(x_i,y_i,z_i)$ 到 $v_j(x_j,y_j,z_j)$ 有弧 (v_i,v_j)，相应弧上的权 $W(v_i,v_j)$ 即为这一切割过程的费用：

$$W(v_i,v_j) = (x_j - x_i) \times (b_i \times c_i) + (y_j - y_i) \times (a_i \times c_i) + (z_j - z_i) \times (a_i \times b_i) \times r$$

其中，a_i、b_i、c_i 分别代表在状态 v_i 时，长方体的左右面、上下面、前后面之间的距离.

例如，状态 $v_5(1,1,0)$，$a_5=a_0-u_1$，$b_5=b_0-u_3$，$c_5=c_0$；状态 $v_6(2,1,0)$，有

$$W(v_5,v_6) = (b_0 - u_3) \times c_0$$

(3) 根据准则知，第一刀有三种选择，即第一刀应切 M_1、M_3、M_5 中的某个面，在图中分别对应的弧为 (v_1,v_2)，(v_1,v_4)，(v_1,v_{10}). 图 G 中从 v_1 到 v_{27} 的任意一条有向道路代表一种切割方式. 从 v_1 到 v_{27} 共有 90 条有向道路，对应着所考虑的 90 种切割方式. v_1 到 v_{27} 的最短路即为最少加工费用，该有向道路即对应所求的最优切割方式.

实例：待加工长方体和成品长方体的长、宽、高分别为 10、14.5、19 和 3、2、4，两者左侧面、正面、底面之间的距离分别为 6、7、9，则边距如下表：

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
6	1	7	5.5	6	9

$r=1$ 时，求得最短路为 $v_1-v_{10}-v_{13}-v_{22}-v_{23}-v_{26}-v_{27}$，其权为 374.

对应的最优切割排列为 $M_6-M_3-M_5-M_1-M_4-M_2$,费用为 374 元.

2. $e\neq0$ 的情况

当 $e\neq0$ 时,即当先后两次垂直切割的平面不平行时,需加调刀费 e. 希望在图 11-13 所示的网络图中某些边增加权来实现此费用增加. 在所有切割序列中,四个垂直面的切割顺序只有三种可能情况:

情况一:先切一对平行面,再切另外一对平行面,总费用比 $e=0$ 时的费用增加 e.

情况二:先切一个面,再切一对平行面,最后割剩余的一个面,总费用比 $e=0$ 时的费用增加 $2e$.

情况三:切割面是两两相互垂直,总费用比 $e=0$ 时的费用增加 $3e$.

在所考虑的 90 种切割序列中,上述三种情况下垂直切割面的排列情形,及在图 G 中对应有向路的必经点如下表:

	垂直切割面排列情形	有向路必经点
情况一 (一)	$M_1-M_2-M_3-M_4$	$(1,0,z),(2,0,z),(2,1,z)$
情况一 (二)	$M_3-M_4-M_1-M_2$	$(0,1,z),(0,2,z),(1,2,z)$
情况二 (一)	$M_3-M_1-M_2-M_4$	$(0,1,z),(1,1,z),(2,1,z)$
情况二 (二)	$M_1-M_3-M_4-M_2$	$(1,0,z),(1,1,z),(1,2,z)$
情况三 (一)	$M_1-M_3-M_2-M_4$	$(1,0,z),(1,1,z),(2,1,z)$
情况三 (二)	$M_3-M_1-M_4-M_2$	$(0,1,z),(1,1,z),(1,2,z)$

$z=0,1,2$

我们希望通过在图 11-13 所示的网络图中的某些边上增加权来进行调刀费用增加的计算,但由于网络图中的某些边是多种切割序列所公用的. 对于某一种切割序列,需要在此边上增加权 e,但对于另外一种切割序列,就有可能不需要在此边上增加权 e,这样我们就不能直接利用图 11-13的网络图进行边加权这种方法来求出最短路径.

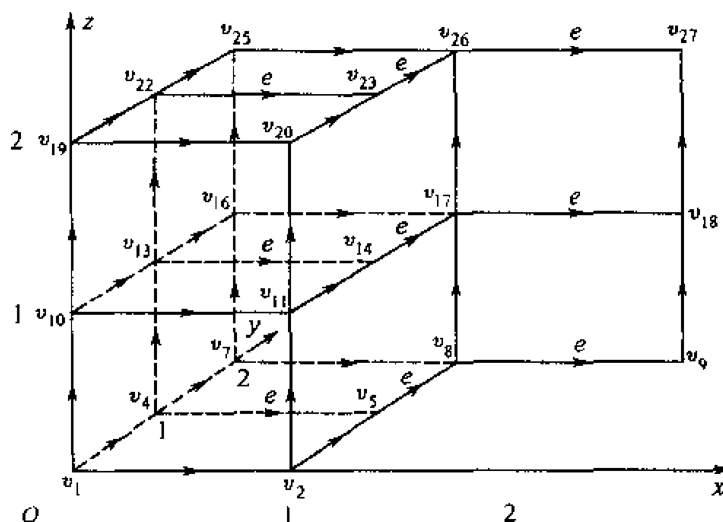


图 11-14 $H1$

由上表可以看出，三种情况的情形（一）有公共点集 $\{(2,1,z)\mid z=0,1,2\}$，情形（二）有公共点集 $\{(1,2,z)\mid z=0,1,2\}$. 且情形（一）的有向路决不通过情形（二）的公共点集，情形（二）的有向路也不通过情形（一）的公共点集. 所以可判断出这两部分是独立的、互补的. 如果我们在图 G 中分别去掉点集 $\{(1,2,z)\mid z=0,1,2\}$ 和 $\{(2,1,z)\mid z=0,1,2\}$ 及与之相关联的入弧，就形成两个新的网络图，如 $H1$（图 11－14）和 $H2$（图 11－15）. 这两个网络图具有互补性，对于一个问题来说，最短路线必存在于它们中的某一个.

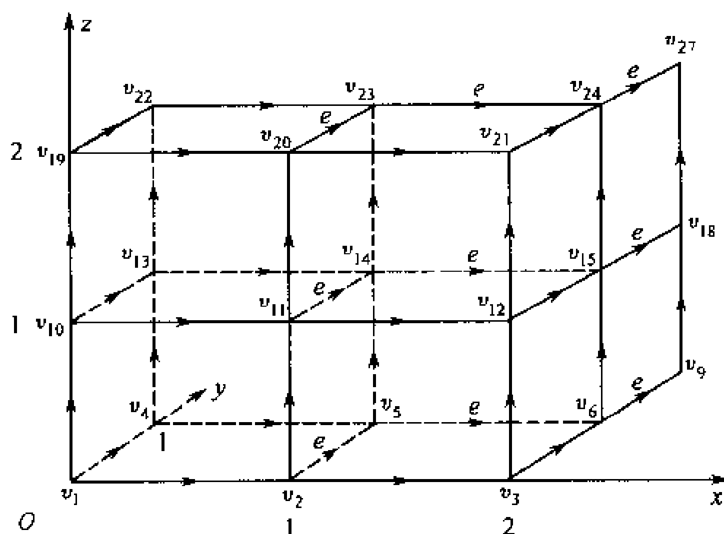


图 11－15 $H2$

由于调整垂直刀具为 3 次时，总费用需增加 $3e$，故我们先安排这种情况的权增加值 e，每次转刀时，给其待切弧上的权增加 e. 增加 e 的情况如图 11－14 及 11－15 中所示. 再来判断是否满足调整垂直刀具为二次、一次时的情况，我们发现所增加的权满足另外两类切割序列.

综合上述分析，我们将原网络图 G 分解为两个网络图 $H1$ 和 $H2$，并在指定边上的权增加 e，然后分别求出图 $H1$ 和 $H2$ 中从 v_1 到 v_{27} 的最短路，最短路的权分别为 d_1,d_2. 则得出整体的最少费用为：$d=\min(d_1,d_2)$，最优切割序列即为其对应的最短路径.

实例：$r=15$，$e=2$ 时，求得图 $G1$ 与 $G2$ 的最短路为 $G2$ 的路 $v_1-v_4-v_5-v_{14}-v_{17}-v_{26}-v_{27}$，权为 4 435，对应的最优切割序列为 $M_3-M_1-M_6-M_4-M_5-M_2$，最优费用为 4 435.

11.5 习 题

1. 某公司在六个城市 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6 中都有分公司，从 C_i 到 C_j 的直达航班票价由下述矩阵的第 i 行、第 j 列元素给出（∞ 表示无直达航班），该公司想算出一张任意两个城市之间最廉价路线表，试作出这样的表来.

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 求图 11－16 中每一结点到其他结点的最短路.

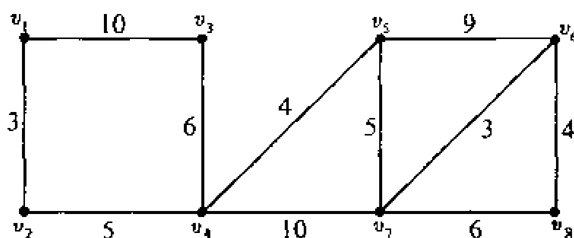


图 11－16

3. 在一个城市交通系统中取出一段如图 11－17 所示,其入口为顶点 v_1,出口为顶点 v_8,每条弧段旁的数字表示通过该路段所需时间,每次转弯需要附加时间为 3,求 v_1 到 v_8 的最短时间路径.

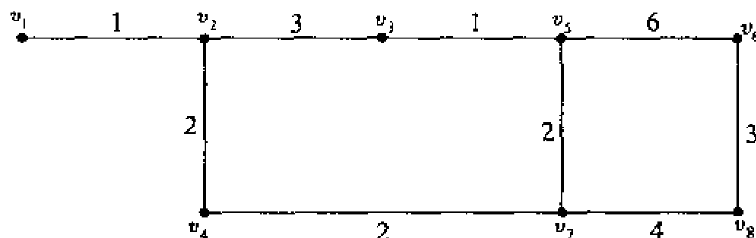


图 11－17

4. 一只狼、一只羊和一筐白菜在河的一岸,一个摆渡人想把它们渡过河去. 但是由于他的船很小,每次只能带走它们之中的一样. 由于明显的原因,狼和羊或者羊和白菜在一起需要人看守. 问摆渡人怎样把它们渡过河去?

第 12 章　匹配与覆盖及其应用

12.1　匹配与覆盖

12.1.1　基本概念

定义 1　设图 $G=(V,E)$，$M\subseteq E$，若 M 的边互不相邻，则称 M 是 G 的一个**匹配**. M 的边称为**匹配边**，$E\setminus M$ 的边称为**自由边**. 若 $(u,v)\in M$，则称 u（或 v）是 v（或 u）的**配偶**. 若顶点 v 与 M 的一条边关联，则称 v 是 **M - 饱和的**；否则称为是 **M - 非饱和的**. 设 M 是 G 的一个匹配，若 G 的每个顶点都是 M - 饱和的，则称 M 是 G 的**完美（理想）匹配**. 设 M 是 G 的一个匹配，若不存在匹配 M' 使 $|M'|>|M|$，则称 M 为 G 的**最大匹配**.

显然，完美匹配一定是最大匹配，反之不一定成立. 如图 12 - 1(a) 所示的匹配（匹配边用粗线表示，下同）是最大匹配但不是完美匹配，实际上该图没有完美匹配. 图 12 - 1(b) 所示的匹配是完美匹配，也是最大匹配.

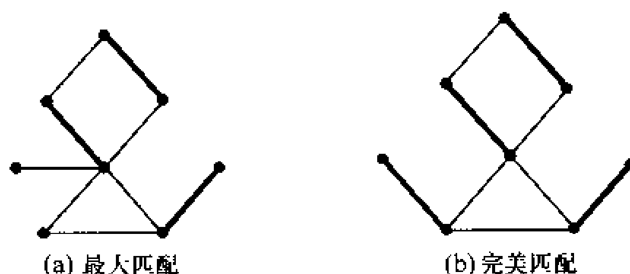


图 12 - 1

定义 2　设 M 是图 $G=(V,E)$ 的匹配，称其边交错于 M 和 $E\setminus M$ 的路（圈）为 **M - 交错路（圈）**. 起点和终点都是 M - 非饱和点的交错路称为 **M - 增广路**.

定义 3　设 $G=(V,E)$，$K\subseteq V$，若 G 的每条边都与 K 的一个顶点关联，则称 K 是图 G 的一个**覆盖**. 设 K 是 G 的一个覆盖，若不存在覆盖 K' 使 $|K'|<|K|$，则称 K 是一个**最小覆盖**.

12.1.2　性质

定理 1　设 M 是图 G 的匹配，则 M 是最大匹配的充要条件是 G 没有 M - 增广路.

此定理提供了求最大匹配的基本思想和方法.

定理 2　设 M 是图 G 的匹配，K 是覆盖，则：

(1) $|M|\leqslant|K|$；

(2) 若 $|M|=|K|$，则 M 是最大匹配，K 是最小覆盖.

12.1.3 二元图的匹配

关于匹配的一般性质对二元图自然也成立，但二元图的匹配还有自身的重要性质，即：

定理 3 设 $G=(X,Y,E)$ 是二元图，M 是匹配，K 是覆盖，则 M,K 分别是最大匹配、最小覆盖的充要条件是：$|M|=|K|$.

定理 4 对二元图 $G=(X,Y,E)$，有

(1) G 存在饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是

$$|N(S)|\geqslant|S|,\quad S\subseteq X$$

其中，$N(S)=\{v\mid \forall u\in S, v \text{ 与 } u \text{ 相邻}\}$.

(2) G 存在完美匹配的充要条件是

$$|N(S)|\geqslant|S|,\quad S\subseteq X$$

(3) 若存在正整数 t，满足 $\forall v\in X, d(v)\geqslant t$，$\forall u\in Y, d(u)\leqslant t$，则存在饱和 X 的每个顶点的匹配.

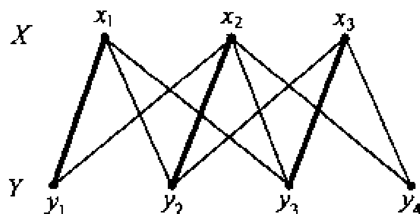


图 12-2

例 1 如图 12-2 所示. M 是二元图 G 的最大匹配，$K=\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 G 的最小覆盖，因为 $|M|=|K|=3$. 又因为 $\forall S\subseteq X$，$|N(S)|\geqslant|S|$，因此存在饱和 X 的所有顶点的匹配（或取 $t=3$，用定理 4 中(3)的结论）；但对于 $\forall S\subseteq X$，$|N(S)|\leqslant|S|$，如取 $S=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$N(S)=\{x_1,x_2,x_3\}$，显然 $|N(S)|<|S|$，因此不存在完美匹配.

推论 若 G 是 k-正则二元图，$k>0$，则 G 有完美匹配.

下面介绍匹配与覆盖的一些应用.

12.2 工作安排问题

12.2.1 工作安排问题之一

假设有：

$$n \text{ 个工人}: x_1,x_2,\cdots,x_n$$
$$n \text{ 件工作}: y_1,y_2,\cdots,y_n$$

已知工人 x_i 能胜任工作 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$，问能否存在一种安排使每人能分配到他所能胜任的一件工作，若能，如何安排？

设：

$$顶点集\ X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

$$顶点集\ Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

$$x_i 与 y_j 相邻 \Leftrightarrow x_i 能胜任工作 y_j$$

由此得到二元图 $G=(X,Y,E)$，问题转化为求二元图的完美匹配. 因为 $|X|=|Y|$，因此完美匹配即为最大匹配.

匈牙利(Hungarian)算法：求二元图的最大匹配.

基本思想：任选取一个匹配 M，对 X 的所有 M－非饱和点，寻找 M－增广路，若不存在 M－增广路，则 M 为最大匹配；若存在 M－增广路，则将 M－增广路中 M 与非 M 的边互换，得到比 M 多一边的匹配 M'，再对 M' 重复上述过程.

算法步骤：设 $G=(X,Y,E)$ 是二元图，M 是一个匹配.

(1) 令 $S=\varnothing, T=\varnothing$.

(2) 若 M－饱和 $X\backslash S$ 的每个顶点，则 M 是最大匹配；否则，取 M－非饱和点 $u\in X\backslash S$，令 $S=S\cup\{u\}$.

(3) 若 $N(S)=T$，转(6)，否则取 $y\in N(S)\backslash T$. 若 y 是 M－饱和点，转(4)，否则转(5).

(4) 设 $(y,x)\in M$，则令 $S=S\cup\{x\}, T=T\cup\{y\}$，转(3).

(5) $u-y$ 路是 M－增广路，设为 P，并令 $M=M\oplus P$（对称差），转(1).

(6) 若 $X\backslash S=\varnothing$，则 M 是最大匹配，否则转(2).

12.2.2 工作安排问题之二

假设有：

$$n\ 个工人：x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$n\ 件工作：y_1, y_2, \cdots, y_n$$

若工人 x_i 担任工作 y_j 的效率为 $w_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，对每人分配一件工作，使总效率最大.

设顶点集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，以 w_{ij} 为边 (x_i,y_j) 的权，作赋权完备二元图 $G=(X,Y,E)$，则问题转化为：在赋权完备二元图中，求权最大的饱和 X 顶点的完美匹配——最佳匹配.

算法 Kuhn-Munkres 可行顶点标号法：求赋权完备二元图的 X 的最佳匹配.

定义 1 设赋权完备二元图 $G=(X,Y,E)$ 的每个顶点 $v\in V$ 对应一个实数 $L(v)$，若满足：

$$L(x)+L(y)\geqslant w(x,y),\quad x\in X, y\in Y$$

其中 $w(x,y)$ 是边 (x,y) 的权，则称 L 为 G 的一个**可行顶点标记**.

设 L 为可行顶点标记，则称相应的生成子图 $G=(V,E)$ 为**相等子图**，这里

$$E_l = \{(x,y)\in E \mid L(x)+L(y)=w(x,y)\}$$

定理 1 设 L 是赋权完备二元图 $G=(X,Y,E)$ 的可行顶点标记，G_l 是相等子图，若 M^* 是 G_l 的完美匹配，则 M^* 是 G 的最佳匹配.

此定理提供了求最佳匹配的算法的基本思路和方法.

算法基本思想 通过对顶点标记将赋权图转化为非赋权图，再用匈牙利算法求最大匹配，若求出的匹配为完美匹配，则停止；否则，改进顶点标记，重新计算.

算法的具体步骤

设 $G=(X,Y,E)$，每条边 $e=(x,y)$ 有权 $w(e)$ 或记为 $w(x,y)$，L 是一个初始可行顶点标记，通常取

$$\begin{cases} L(x) = \max\{w(x,y) \mid y \in Y\}, & x \in X \\ L(y) = 0, & y \in Y \end{cases}$$

M 是相等子图 G_l 的一个匹配.

(1) 若 X 的每个顶点都是饱和的，则 M 是最佳匹配；否则取 M－非饱和点 $u \in X$，令

$$S = \{u\}, \quad T = \varnothing$$

(2) 若 $N_{G_l}(S) = T$，则 G_l 没有完美匹配，转(3)；否则，转(4).

(3) 调整标记，计算

$$a_l = \min\{L(x) + L(y) - w(x,y) \mid x \in S, y \in T\}$$

由此得新的可行顶点标记

$$L'(v) = \begin{cases} L(v) - a_l, & v \in S \\ L(v) + a_l, & v \in T \\ L(v), & \text{否则} \end{cases}$$

令 $L = L'$，$G_l = G_{l'}$.

(4) 取 $y \in N_{G_l}(S) \setminus T$，若 y 是 M－饱和点，转(5)；否则，转(6).

(5) 设 $(y,x) \in M$，令

$$S = S \cup \{x\}, \quad T = T \cup \{y\}$$

转(2).

(6) 在 G_l 中的 $u-y$ 交错路是 M－增广路，记为 P，并令

$$M = M \oplus P$$

转(1).

例 1　求赋权邻接矩阵 M 表示的赋权完备二元图的最佳匹配. 其中

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

取初始可行顶点标记如表 12－1(左)，右上角打“＊”的元素表示

$$L(x) + L(y) = w(x,y)$$

表 12－1

$L(x)$ \ $L(y)$	0	0	0	0	$L(x)$ \ $L(y)$	1	0	0	0
5	4	5*	5*	1	5	4	5*	5*	1
6	2	2	4	6*	6	2	2	4	6*
4	4*	2	3	3	3	4*	2	3*	3*
5	5*	0	2	1	4	5*	0	2	1

作出相等子图 G_l,并任给 G_l 的匹配 M,如图 12 – 3.

按步骤:

(1) $S=\{x_4\}, T=\varnothing$;

(4) $y_1 \in N_{G_1}(S)\setminus T$;

(5) $(y_1,x_3)\in M, S=\{x_4,x_3\}, T=\{y_1\}$;

(2) $N_{G_1}(S)=T$;

(3) 计算 $a_l=1$,经调整得新的可行顶点标记如表 12 – 1(右),相应作出新的相等子图 G_2 而匹配 M 没有改变(图 12 – 4). 继续迭代;

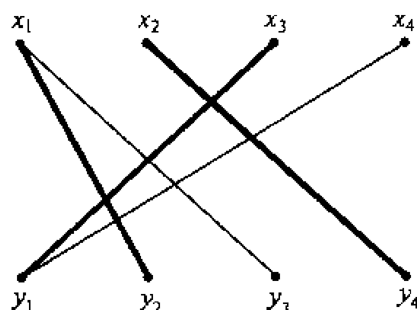


图 12 – 3

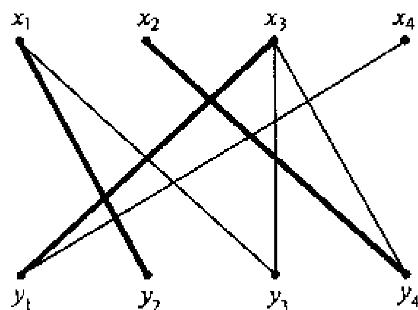


图 12 – 4

(4) $y_3 \in N_{G_2}(S)\setminus T$;

(6) $P=x_4y_1x_3y_3$,

$M=M\oplus P=\{(x_1,y_2),(x_2,y_4),(x_3,y_3),(x_4,y_1)\}$,

如图 12 – 5 所示;

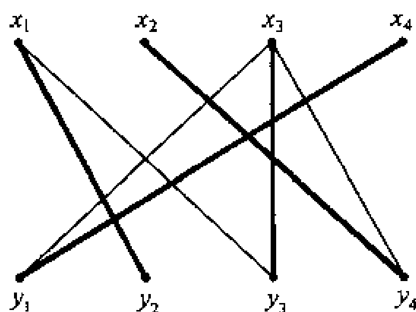


图 12 – 5

则 X 的每个顶点都是饱和的,所以当前匹配是最佳匹配,即

$$M=\{(x_1,y_2),(x_2,y_4),(x_3,y_3),(x_4,y_1)\}$$

其权为:

$$w(M)=w_{12}+w_{24}+w_{33}+w_{41}=19$$

12.3 系统监控问题

本节介绍覆盖的应用.

12.3.1 系统监控问题之一

例 1 在城市街道中,需要在街道口设立岗亭,以便监控和指挥过往交通. 为了监控所有街道,问至少要设立多少岗亭?

用一个连通图来模拟城市街道系统,在某街道口设岗亭,即把相应的顶点作为监控点而监控所关联的所有边,因此,例 1 的问题就是一个"顶点监控边"的问题. 换言之,需在一个连通图 G 中找顶点子集 $K\subseteq V(G)$,使每条边都与 K 的一个顶点关联,且 K 是满足这个性质的顶点最少的集,也就是求连通图 G 的最小覆盖.

求连通图的最小覆盖没有有效算法. 可以用逻辑算法,但随着顶点数的增加,逻辑算法的复杂性成指数倍增长,因此逻辑算法只适用顶点数较少的情况. 由于实际问题中,顶点数一般较多,下面介绍求最小覆盖的近似算法,即启发式算法.

设想把顶点度数越大的顶点作为监控点,则能监控更多的边,这是一个合理的想法.

算法步骤——最小覆盖的启发式算法:

设 G 是连通图,用 K 表示所求的最小覆盖. 令 $K=\varnothing$.

(1) 若 $V(G)=\varnothing$,停. 否则取 $u\in V(G)$,使

$$d(u) = \max\{d(v) \mid v\in V(G)\}$$

(当 u 的选取不唯一时,可能导致不同的结果,因此,必要时应比较所有的结果. 通常只能得到最小覆盖的近似覆盖).

(2) 令 $K=K\cup\{u\}$,$G=G-u$,转(1).

例 2 求图 12-6 的最小覆盖.

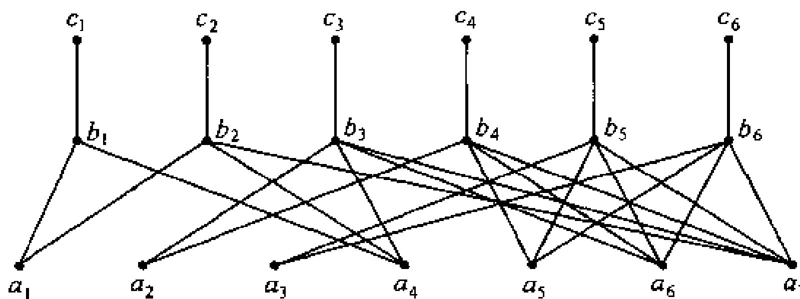


图 12-6

按每次取顶点度数最大的顶点,可依次选取:

$$a_7,\ a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

故得 $K=\{a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$.

另一方面,我们仍按每次取顶点度数最大的顶点,又可得到:

$$K' = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$$

显然，K'是最小覆盖. 因为每个 b_i 都连接着一条割边(b_i, c_i)，$i=1,2,\cdots,6$，即最小覆盖至少含有 6 个点.

从此例可以看出，两个顶点的度数相同时，若其中一个顶点关联着割边，应先选这一顶点，使得到的覆盖更接近最小覆盖.

12.3.2 系统监控问题之二

例 3 用一连通图代表一指挥系统. 顶点表示被指挥的单位，边表示可以直接下达命令的通信线路. 欲在某些单位建立指挥站，以便可以通过指挥站直接给各单位下达命令，问如何建立指挥站使指挥站尽可能少？

假如在某一顶点 v 建立指挥站，则可通过这个指挥站直接给相邻顶点（单位）下达命令. 因此例 3 的问题就是在一个监控系统中的"**顶点监控顶点**"问题. 换言之，需在一个连通图 G 中找顶点数最少的子集 $D\subseteq V(G)$，对每个 $v\in V(G)$，或者 v 在 D 中，或者 v 与 D 中某个顶点相邻.

定义 1 设 G 是连通图，$D\subseteq V(G)$，若对每个 $v\in V(G)$，或 $v\in D$，或 $D\cap N(v)\neq\varnothing$，则称 D 为图 G 的一个**控制集**. 若 D 是控制集，而 D 的任何真子集都不是**控制集**，则称 D 是**极小控制集**. 顶点数最小的控制集称为**最小控制集**. 最小控制集所含顶点数目称为**控制数**，记为 $\gamma_0(G)$ 或 γ_0.

例 3 就是求最小控制集问题. 求最小控制集没有有效算法，可用逻辑算法或近似算法（即启发式算法）.

设想把顶点度数越大的顶点作为监控点（即属于控制集），则能监控更多的顶点，由此求出最小控制集. 从这一合理的想法，得到启发式算法.

算法**步骤**——最小控制集的启发式算法：

设 G 是连通图，用 D 表示所求的最小控制集. 令 $D=\varnothing$.

（1）若 $V(G)=\varnothing$，停. 否则取 $u\in V(G)$，使

$$d(u) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

（当 u 的选取不唯一时，可能导致不同的结果，因此，必要时应比较所有的结果. 通常只能得到最小控制集的近似值）.

（2）令 $D=D\cup\{u\}$，$G=G-\{u,N(u)\}$，其中 $N(u)$表示 u 的所有相邻顶点的集合. 转(1).

12.4 建模案例：锁具装箱问题

12.4.1 问题的提出

某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有 5 个槽，每个槽的高度从$\{1,2,3,4,5,6\}$6 个数中任取一数，要求满足：

1. 任意一把锁至少有三个槽高度互不相同；
2. 任意一把锁相邻两槽的高度之差不能为 5. 所有互不相同的锁具称为一批.

两把锁具互开当且仅当

1. 两把锁的钥匙有 4 个槽高度相同；

2. 其余一个槽高度相差 1.

在原来一批锁具中随机取 60 个装为一箱，成箱购买的顾客总抱怨购得的锁具有互开现象. 如何装箱(60 个为一箱)，如何给箱子以标志，出售时如何利用这些标志，使团体顾客减少抱怨.

12.4.2 模型的建立与求解

1. 每批锁具的个数与箱数

命题 1 集合 $V=\{(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)\mid h_i\in\{1,2,3,4,5,6\},|h_i-h_{i-1}|\neq 5$，且 h_1,h_2,h_3,h_4,h_5 中至少有三个相异$\}$，则 V 共有 5 880 个元素.

证 令

$$C=\{(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)\mid h_i\in\{1,2,3,4,5,6\},i=1,2,3,4,5\}$$

$$A=\{(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)\mid h_i\in\{1,2,3,4,5,6\},h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\text{ 中至多有两个相异}\}$$

$$B=\{(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)\mid \text{存在 } i,\text{使}|h_i-h_{i-1}|=5\}$$

则一批锁具的总数为：

$$|V|=|C|-|A\cup B|=|C|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

易得：

$$|C|=6^5=7\ 776$$

$$|A|=C_6^2(2^5-2)+6=456$$

$$|B|=2\times 4\times 6^3-(3\times 2\times 6^2+3\times 2^2\times 6)+(2\times 2\times 6+2^3)-2=1\ 470$$

$$|A\cap B|=2^5-2=30$$

所以

$$|V|=|C|-|A\cup B|=7\ 776-456-1\ 470+30=5\ 880$$

结论 每批锁具有 5 880 个，共装 98 箱.

2. 互开图及其性质

构造图 G：以一批锁具的全体为顶点集 V，即

$$V=\{h_1h_2h_3h_4h_5\mid h_i\in\{1,2,3,4,5,6\},|h_i-h_{i-1}|\neq 5,\text{且 } h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\text{ 中至少三个相异}\}$$

两顶点连一条边当且仅当它们所对应的锁具互开. 因此，边集

$$E=\{v_iv_j\mid v_i,v_j\in V,i\neq j,||v_i|-|v_j||=1,|v_i|=\sum_{i=1}^{5}h_i\}$$

称图 $G=(V,E)$ 为**互开图**.

命题 2 互开图是二部图，其划分(X,Y)为：

$$X=\{h_1h_2h_3h_4h_5\mid \sum_{i=1}^{5}h_i\text{ 是奇数}\}$$

$$Y=\{h_1h_2h_3h_4h_5\mid \sum_{i=1}^{5}h_i\text{ 是偶数}\},\text{且}|X|=|Y|$$

证 两锁具互开必有其槽高之和相差 1，因此 X 中任两顶点互不相邻，Y 中任两顶点也互不

相邻.

在 X 与 Y 之间可建立一一对应关系：

$$f: h_1h_2h_3h_4h_5 \in X \longleftrightarrow (7-h_1)(7-h_2)(7-h_3)(7-h_4)(7-h_5) \in Y$$

因此

$$|X| = |Y|$$

命题 3　互开图 G 有理想匹配.

可用匈牙利算法求得 G 的最大匹配 M,得知 M 的边数 $|M| = |X|$,因此 M 为理想匹配.

引入独立集的定义：

定义 1　对图 $G=(V,E)$,$N\subseteq V$,若 N 的任意两个顶点都不相邻,则称 N 为**独立集**;若 N 为独立集,任意增加一个顶点都不是独立集,则称 N 为**极大独立集**;G 中顶点数最多的独立集称为**最大独立集**. 最大独立集 N 与最小覆盖 K 有关系：

$$|N| + |K| = |V|$$

其中 $|V|$ 是图 G 的顶点数.

命题 4　若 N 是图 G 的最大独立集,则 $|N| = |X| = 2\,940$.

证　因 G 是二部图,且图 G 的顶点的最小度数 $\delta(G)>0$,由二元图的匹配定理 1 有

$$|M| = |K|$$

其中 M 是最大匹配,K 是最小覆盖.

又由命题 3 知,$|M| = |V|/2$,因此,由最小覆盖与最大独立集的互补性知：

$$|N| = |V| - |K| = |V| - |M| = |V|/2 = |X| = 2\,940$$

结论　对同一批锁具,将槽高之和为奇数,为偶数的分别装箱,并做"奇"(或 1)"偶"(或 0)的标志,只要购买数不超过 2 940/60 = 49 箱时,可保证不会出现互开现象. 若购买量超过 49 箱,则必定有互开的锁具.

3. 装箱、标志和销售方案

每批锁具按槽高之和 I 分组,显然 $I=8,9,\cdots,27$,即共分 20 组. 设各组的锁具个数为 $J(I)$,由对称性可知:$J(8)=J(27)$,$J(9)=J(26)$,$\cdots$,$J(17)=J(18)$. 通过编程可以算出：

I	8,27	10,25	12,23	14,21	16,19	18,17	20,15	22,13	24,11	26,9
$J(I)$	20	120	251	405	539	563	508	322	162	50

两锁具互开,则二者必分别属于 I 值相邻的两组. 将 I 值为偶数的各组按上表顺序装 49 箱,并用 I 值标志,如：

箱号	1	2	3	4	…	48	49
标志	0810	0010	1012	0012	…	0024	2426

第一箱装 $I=8$ 的 20 个,$I=10$ 的 40 个,标志 0810;第二箱装 $I=10$ 的 60 个,标志 0010; 其余类推. 对 I 值为奇数的类似地标志.

出售时,当购买量不超过 49 箱时,只售出标志为偶数(或奇数)者,且标志要互不相同. 或

奇、偶均有时，其奇标志与偶标志的前两位，后两位，不能相差 1.

4. 任意装箱造成的抱怨程度

从一批 5 880 个锁具中随机取 60 个装一箱，120 个装一箱，……，抱怨程度可用所购的一箱或二箱（或更多箱）锁具中平均有多少对互开来衡量.

由于互开图 $G=(V,E)$ 的边数 $|E|=22\ 778$ 条，而 $K_{5\ 880}$ 的边数为 $C_{5\ 880}^2$，故任两锁具互开的概率为 $22\ 778/C_{5\ 880}^2$，所以一箱锁具的平均互开对数为：

$$E_1 = 22\ 778/C_{5\ 880}^2 \times C_{60}^2 = 2.33$$

两箱锁具的平均互开对数为：

$$E_2 = 22\ 778/C_{5\ 880}^2 \times C_{120}^2 = 9.40$$

一般地，k 箱锁具的平均互开对数为：

$$E_k = 22\ 778/C_{5\ 880}^2 \times C_{60k}^2$$

抱怨度也可用另一指标来衡量，即要使一箱，两箱，……中剩下的锁具不能互开，平均需要丢掉的锁具数. 这一指标可用计算机模拟得到.

12.5 习　　题

1. 甲乙二人玩“捉乌龟”游戏，先将 54 张扑克牌藏起一张，于是剩下的有一张没有对子，它叫做“乌龟”. 再将牌分给两人，每人把手中的对子都抛出来，你能否判断“乌龟”在谁手中？为什么？

2. 出席某次国际学术报告的 6 个成员 a，b，c，d，e，f 的情况是：

a：会讲汉语、法语和日语；

b：会讲德语、俄语和日语；

c：会讲英语和法语；

d：会讲汉语和西班牙语；

e：会讲英语和德语；

f：会讲俄语和西班牙语.

欲将此 6 人分为每两人一组，使同一组的人能交谈，是否可行，为什么？

3. 一次舞会，共有 n 位男士和 n 位女士参加，已知每位男士至少认识 2 位女士，而每位女士最多认识 2 位男士，问能否把男士和女士正好分成 n 对，使每一对男女都彼此认识.

4. 已知用 x_1,x_2,x_3,x_4 四种原料制造 y_1,y_2,y_3,y_4 四种产品的成本如下面的矩阵所示，问采用哪种方案可使成本最低（假定用原料制作某种产品就不能用来制作其他产品）？

$$E = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 99 & 6 & 59 & 73 \\ 79 & 15 & 93 & 87 \\ 67 & 93 & 13 & 81 \\ 16 & 79 & 86 & 26 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. 有四种不同规格的产品要分配在四台不同性能的机床上同时加工，由于产品的规格不同和机床的性能各异，因此每一件产品在不同机车上加工的工时定额也不同，其工时定额列于

表 12－2,问应如何合理地分配加工任务,使总的加工时间最省?

表 12－2

机床 \ 产品	1	2	3	4
1	7	50	16	1
2	20	13	40	35
3	21	16	25	42
4	48	27	43	16

6. 一车队有八辆车,这八辆车存放在不同的地点,队长要派其中 5 辆到 5 个不同的工地去运货.各车从存放处调到装货地点所需费用列于表 12－3,问应选用哪 5 辆车调到何处去运货,才能使各车从所在地点调到装货地点所需的总费用最少?

表 12－3

装货地点 \ 车号	1	2	3	4	5	6	7	8
1	30	25	18	32	27	19	22	26
2	29	31	19	18	21	20	30	19
3	28	29	30	19	19	22	23	26
4	29	30	19	24	25	19	18	21
5	21	20	18	17	16	14	16	18

第 13 章　行遍性问题

13.1　中国邮递员问题

13.1.1　欧拉图

定义 1　设 $G=(V,E)$是连通无向图.

(1) 经过 G 的每边至少一次的闭通路称为**巡回**;

(2) 经过 G 的每边正好一次的巡回称为**欧拉巡回**;

(3) 存在欧拉巡回的图称为**欧拉图**;

(4) 经过 G 的每边正好一次的道路称为**欧拉道路**.

定理 1　对于非空连通图 G,下列命题等价:

(1) G 是欧拉图;

(2) G 无奇次顶点;

(3) G 的边集能划分为圈.

推论 1　设 G 是非平凡连通图,则 G 有欧拉道路的充要条件是 G 最多只有两个奇次顶点.

13.1.2　中国邮递员问题

邮递员发送邮件时,要从邮局出发,经过他投递范围内的每条街道至少一次,然后返回邮局,但邮递员希望选择一条行程最短的路线. 这就是**中国邮递员问题**.

若将投递区的街道用边表示,街道的长度用边权表示,邮局、街道交叉口用点表示,则一个投递区构成一个赋权连通无向图. 中国邮递员问题转化为:在一个非负加权连通图 G 中,寻求一个权最小的巡回. 这样的巡回称为**最佳巡回**.

下面分三种情况讨论:

1. G 是欧拉图

此时 G 的任何一个欧拉巡回便是最佳巡回. 问题归结为在欧拉图中确定一个欧拉巡回. Fleury 算法便解决了这一问题.

Fleury 算法的基本思想:从任一点出发,每当访问一条边时,先要进行检查. 如果可供访问的边不只一条,则应选一条不是未访问的边集的导出子图的割边作为访问边,直到没有边可选择为止.

注:割边的定义:设 G 连通,$e\in E(G)$,若从 G 中删除边 e 后,图 $G-\{e\}$ 不连通,则称边 e 为图 G 的割边.

G 的边 e 是割边的充要条件是 e 不含在 G 的圈中.

Fleury **算法**:求欧拉图的欧拉巡回:

(1) 任选一个顶点 v_0，令道路 $w_0=v_0$.

(2) 假定道路 $w_i=v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$ 已经选好，则从 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选一条边 e_{i+1}，使：

a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

b) 除非不能选择，否则一定要使 e_{i+1} 不是 $G_i=G[E-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}]$ 的割边.

(3) 第(2)步不能进行时就停止.

2. G 不是欧拉图

若 G 不是欧拉图，则 G 的任何一个巡回经过某些边必定多于一次. 解决这类问题的一般方法是，在一些点对之间引入重复边（重复边与它平行的边具有相同的权），使原图成为欧拉图，但希望所有添加的重复边的权的总和为最小.

情形 1　G 正好有两个奇次顶点.

设 G 正好有两个奇次顶点 u 和 v，求 G 的最佳巡回的算法如下：

(1) 用 Dijkstra 算法求出奇次顶点 u 与 v 之间的最短路径 P；

(2) 令 $G^*=G\cup P$，则 G^* 为欧拉图；

(3) 用 Fleury 算法求出 G^* 的欧拉巡回，这就是 G 的最佳巡回.

情形 2　G 有 $2n$ 个奇次顶点（$n\geqslant 2$）.

Edmonds 于 1965 年提出的最小对集算法，很好地解决了这一类问题.

Edmonds 算法的基本思想：先将奇次顶点配对，要求最佳配对，即点对之间距离总和最小. 再沿点对之间的最短路径添加重复边得欧拉图 G^*，G^* 的欧拉巡回便是原图的最佳巡回.

Edmonds 最小对集算法：

(1) 用 Floyd 算法求出的所有奇次顶点之间的最短路径和距离；

(2) 以 G 的所有奇次顶点为顶点集（个数为偶数），作一完备图，边上的权为两端点在原图 G 中的最短距离，将此完备加权图记为 G_1；

(3) 用 Edmonds 算法求出 G_1 的最小权理想匹配 M（参见[38]），得到奇次顶点的最佳配对；

(4) 在 G 中沿配对顶点之间的最短路径添加重复边得欧拉图 G^*；

(5) 用 Fleury 算法求出 G^* 的欧拉巡回，这就是 G 的最佳巡回.

例 1　求图 13－1 所示投递区 G 的一条最佳邮递路线.

解　图 G 中有 v_4、v_7、v_8、v_9 四个奇次顶点. 用 Floyd 算法求出它们之间的最短路径和距离如下：

$$P_{v_4v_7}=v_4v_3v_2v_7,\quad d(v_4,v_7)=5$$
$$P_{v_4v_8}=v_4v_8,\quad d(v_4,v_8)=3$$
$$P_{v_4v_9}=v_4v_8v_9,\quad d(v_4,v_9)=6$$
$$P_{v_7v_8}=v_7v_8,\quad d(v_7,v_8)=9$$
$$P_{v_7v_9}=v_7v_9,\quad d(v_7,v_9)=6$$
$$P_{v_8v_9}=v_8v_9,\quad d(v_8,v_9)=3$$

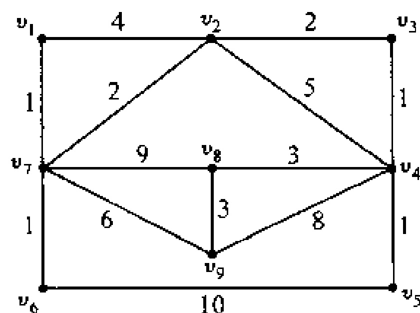


图 13－1

以 v_4、v_7、v_8、v_9 为顶点,它们之间的距离为边权构造完备图 G_1,如图 13-2.

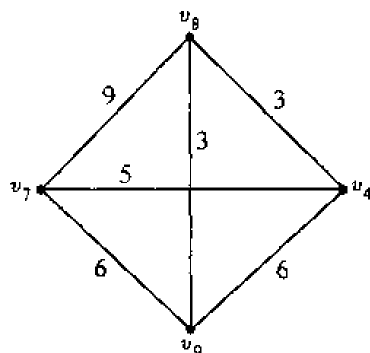


图 13-2 G_1

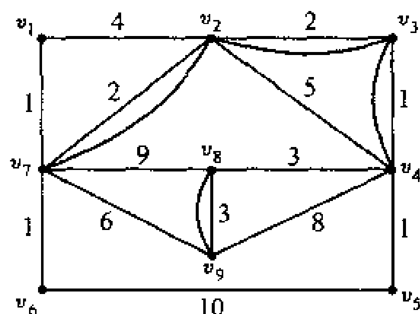


图 13-3 G_2

求出 G_1 的最小权完美匹配 $M=\{(v_4,v_7),(v_8,v_9)\}$.

在 G 中沿 v_4 到 v_7 的最短路径添加重复边,沿 v_8 到 v_9 的最短路径 v_8v_9 添加重复边,得欧拉图 G_2,如图 13-3.

G_2 中一条欧拉巡回就是 G 的一条最佳巡回. 其权值为 64.

13.2 推销员问题

13.2.1 哈密顿图

定义 1 设 $G=(V,E)$ 是连通无向图.

(1) 经过 G 的每个顶点正好一次的路径,称为 G 的一条**哈密顿路径**,简称 H 路径;

(2) 经过 G 的每个顶点正好一次的圈,称为 G 的**哈密顿圈**或 **H 圈**;

(3) 含 H 圈的图称为**哈密顿图**或 H 图.

要判定一个图是否含有 H 圈是 NP-完备的,要求出一个图的 H 圈也没有多项式时间算法.

13.2.2 推销员问题

流动推销员需要访问某地区的所有城镇,最后回到出发点. 问如何安排旅行路线使总行程最小,这就是**推销员问题**. 推销员问题也是 NP-完备问题.

若用顶点表示城镇,边表示连接两城镇的路,边上的权表示距离(或时间、费用),于是推销员问题就成为在加权图中寻找一条经过每个顶点至少一次的最短闭通路问题.

定义 2 在加权图 $G=(V,E)$ 中,

(1) 权最小的哈密顿圈称为**最佳 H 圈**.

(2) 经过每个顶点至少一次的权最小的闭通路称为**最佳推销员回路**.

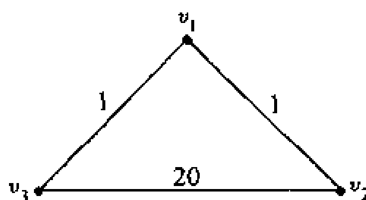


图 13-4

一般说来,最佳哈密顿圈不一定是最佳推销员回路,同样最佳推销员回路也不一定是最佳哈密顿圈. 例如图 13-4,此图中唯一的 H

回路(v_1,v_2,v_3,v_1),其权和等于 $1+20+1=22$,而通过点 v_1 两次的最佳推销员回路(v_1,v_2,v_1,v_3,v_1)的权和为 $1+1+1+1=4$.

以下定理说明何时最佳哈密顿圈也是最佳推销员回路.

定理 1 在加权图 $G=(V,E)$中,若对任意 $x,y,z\in V,z\neq x,z\neq y$,都有 $w(x,y)\leqslant w(x,z)+w(z,y)$,则图 G 的最佳 H 圈也是最佳推销员回路.

最佳推销员回路问题可转化为最佳 H 圈问题. 方法是由给定的图 $G=(V,E)$构造一个以 V 为顶点集的完备图 $G'=(V,E')$,E'的每条边(x,y)的权等于顶点 x 与 y 在图中最短路的权. 即:

$$\forall x,y\in E', w(x,y) = \min d_G(x,y)$$

定理2 加权图 G 的最佳推销员回路的权与 G'的最佳 H 圈的权相同.

因此,在加权图中寻求最佳推销员回路的问题就可转化为在一个完备加权图中寻求最佳哈密顿圈的问题,称为 TSP 问题.

13.2.3 TSP 近似算法

TSP 近似算法包括构造型算法和改进型算法. 构造型算法是按一定规则一次性地构造出一个解. 而改进型算法则是以某一解作为初始解,逐步迭代,改进解,是一种迭代法. 一般是以构造型算法得到一个初始解,然后再用改进型算法逐步改进.

常见的两种构造型算法是最小权匹配算法和对角线完全算法,参见[23].

下面介绍一个改进型算法:二边逐次修正法.

二边逐次修正法:

(1) 任取初始 H 圈:$C_0=v_1,v_2,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_n,v_1$.

(2) 对所有的 $i,j,1<i+1<j<n$,若 $w(v_i,v_j)+w(v_{i+1},v_{j+1})<w(v_i,v_{i+1})+w(v_j,v_{j+1})$,则在 C_0 中删去边(v_i,v_{i+1})和(v_j,v_{j+1})而加入边(v_i,v_j)和(v_{i+1},v_{j+1}),形成新的 H 圈 C,即

$$C = v_1,v_2,\cdots,v_i,v_j,v_{j-1},\cdots,v_{i+1},v_{j+1},\cdots,v_n,v_1$$

见图 13-5(a),(b).

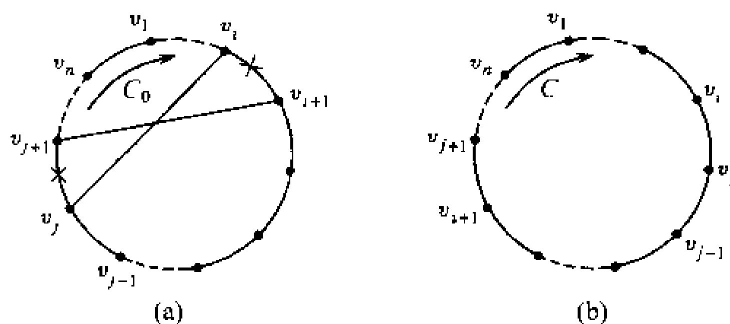


图 13-5

(3) 对 C 重复步骤(2),直到条件不满足为止,最后得到的 C 即为所求.

例 1 对图 13-6 所示的完备图 G,用二边逐次修正法求较优 H 圈.

解　首先任选一初始 H 圈：$C_0 = v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$，见图 13－7(a)．可以看出，$w(v_1,v_4)+w(v_2,v_5)<w(v_1,v_2)+w(v_4,v_5)$．删去边 (v_1,v_2)，(v_4,v_5)，加入边 (v_1,v_4) 和 (v_2,v_5)，得到一新的 H 圈 C_1，见图 13－7(b)．

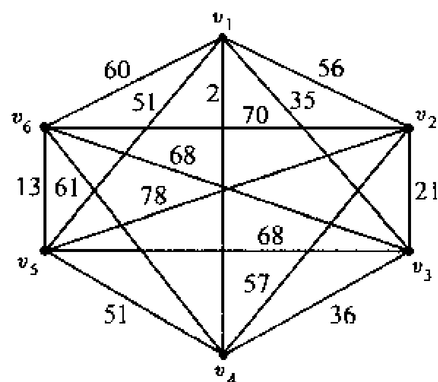


图 13－6

$$C_1 = v_1v_4v_3v_2v_5v_6v_1$$

而图(b)中，$w(v_1,v_5)+w(v_2,v_6)<w(v_1,v_6)+w(v_2,v_5)$．删去边 (v_1,v_6)，(v_2,v_5)，加入边 (v_1,v_5) 和 (v_2,v_6)，得到一新的 H 圈 C_2，见图13－7(c)．而图(c)中，$w(v_1,v_3)+w(v_4,v_5)<w(v_1,v_5)+w(v_3,v_4)$．删去边 (v_1,v_5)，(v_3,v_4)，加入边 (v_1,v_3) 和 (v_4,v_5)，得到一新的 H 圈 C_3，见图 13－7(d)．其权值为：$w(C_3)=192$．

为了知道找出的这个解的好坏，可以用最佳 H 圈的权的下界与其比较．利用最小生成树可得到最佳 H 圈的一个下界，方法如下：

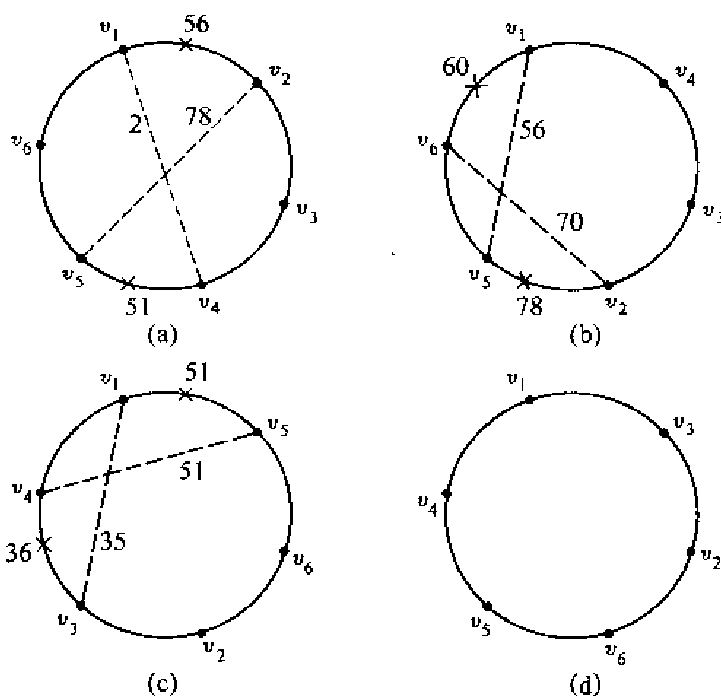


图 13－7

设 C 是 G 的一个最佳 H 圈，则对 G 的任一顶点 v，$C-v$ 是 $G-v$ 的路径，也是 $G-v$ 的生成树．如果 T 是 $G-v$ 的最小生成树，且 e_1,e_2 是与 v 关联的边中权最小的两条边，则

$$w(T)+w(e_1)+w(e_2)$$

将是 $w(C)$ 的一个下界．

若取 $v=v_5$，可得 $C-v_5$ 的一棵最小生成树(图 13－8)．其权 $w(T)=118$，与顶点 v_5 关联的权最小的两条边为 (v_5,v_6) 和 (v_5,v_4)，因此

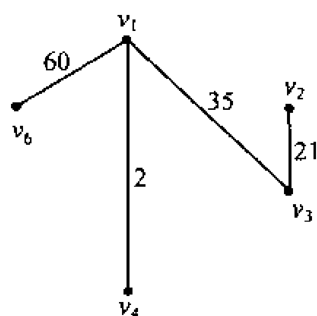


图 13－8

$$w(C) \geqslant w(T) + w(v_5, v_6) + w(v_5, v_4)$$
$$= 118 + 13 + 51 = 182$$

前面求出的圈的权 $w(C_3) = 192$，故最佳圈的权应满足：

$$182 \leqslant w(C) \leqslant 192$$

近十年来，随着人工神经网络科学的发展，出现了用神经网络解决组合优化问题的方法. TSP 问题也有了许多基于神经网络的近似算法，如模拟退火法、弹性网法等，参见[25].

13.3　建模案例：最佳灾情巡视路线

这里介绍 1998 年全国大学生数学模型竞赛 B 题中的两个问题.

13.3.1　问题

今年夏天某县遭受水灾. 为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视. 巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地的路线.

1. 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的路线.

2. 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间 $T = 2$ h，在各村停留时间 $t = 1$ h，汽车行驶速度 $V = 35$ km/h. 要在 24 h 内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下最佳的巡视路线.

乡镇、村的公路网示意图见图 13－9.

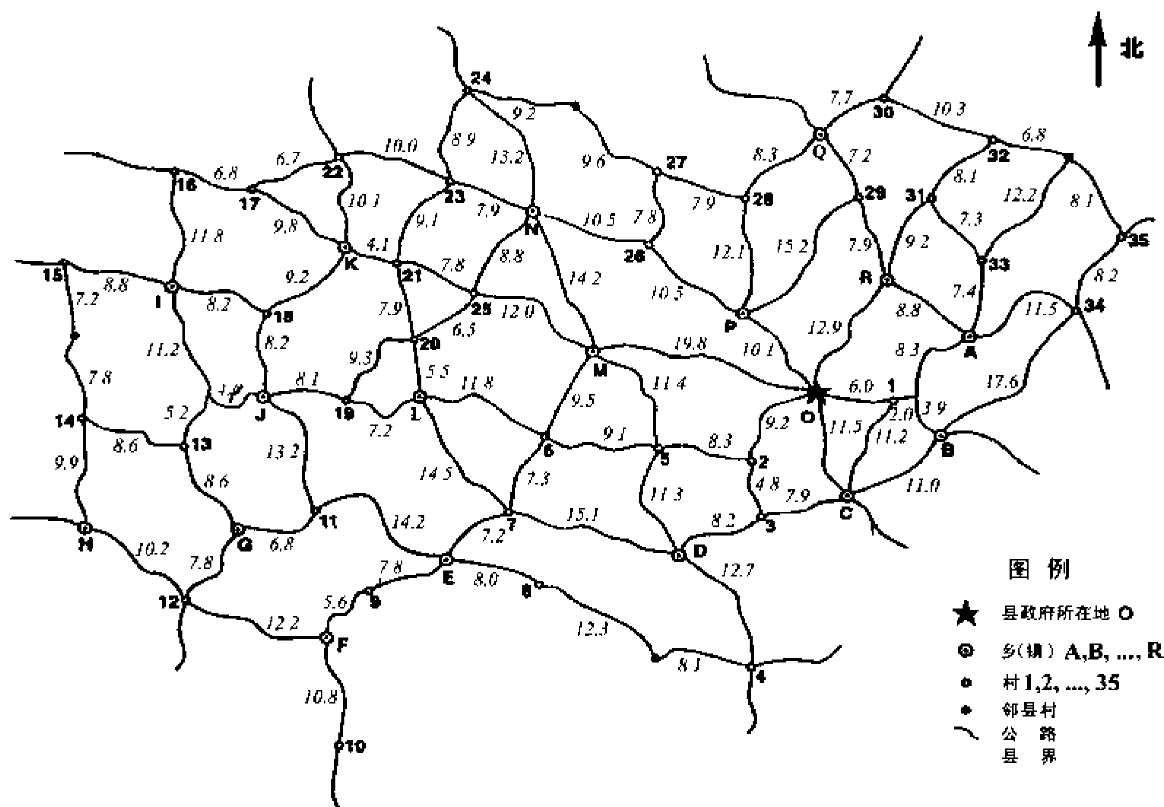


图 13－9

13.3.2 假设

1. 汽车在路上的速度恒定,不会出现抛锚等现象;
2. 巡视当中,在每个乡镇、村的停留时间一定,不会出现特殊情况而延误时间;
3. 每个小组的汽车行驶速度完全一样;
4. 分组后,各小组只能走自己区内的路,不能走其他小组的路,除公共路外.

13.3.3 模型的建立与求解

将公路网图中,每个乡(镇)或村看作图中的一个节点,各乡(镇)、村之间的公路看作图中对应节点间的边,各条公路的长度(或行驶时间)看作对应边上的权,所给公路网就转化为加权网络图,问题就转化为在给定的加权网络图中寻找从给定点 O 出发,行遍所有顶点至少一次再回到 O 点,使得总权(路程或时间)最小,此即最佳推销员回路问题.

在加权图 G 中求最佳推销员回路问题是 NP－完全问题,我们采用一种近似算法求出该问题的一个近似最优解,来代替最优解,算法如下:

算法 求加权图 $G(V,E)$ 的最佳推销员回路的近似算法:

1. 用图论软件包求出 G 中任意两个顶点间的最短路,构造出完备图 $G'(V,E')$,

$$\forall (x,y) \in E', \quad \omega(x,y) = \min d_G(x,y)$$

2. 输入图 G'的一个初始 H 圈;
3. 用对角线完全算法(见[23])产生一个初始 H 圈;
4. 随机搜索出 G'中若干个 H 圈,例如 2 000 个;
5. 对第 2、3、4 步所得的每个 H 圈,用二边逐次修正法进行优化,得到近似最佳 H 圈;
6. 在第 5 步求出的所有 H 圈中,找出权最小的一个,此即要找的最佳 H 圈的近似解.

由于二边逐次修正法的结果与初始圈有关,故本算法第 2、3、4 步分别用三种方法产生初始圈,以保证能得到较优的计算结果.

问题一 若分为三组巡视,设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

此问题是多个推销员的最佳推销员回路问题. 即在加权图 G 中求顶点集 V 的划分 V_1, $V_2,\cdots,V_n$,将 G 分成 n 个生成子图 $G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_n]$,使得

(1) 顶点 $O \in V_i$, $i=1,2,3,\cdots,n$.

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V(G)$.

(3) $\dfrac{\max\limits_{i,j} |\omega(C_i)-\omega(C_j)|}{\max\limits_{i} \omega(C_i)} \leqslant \alpha$,其中 C_i 为 V_i 的导出子图 $G[V_i]$中的最佳推销员回路,$\omega(C_i)$ 为 C_i 的权,$i,j=1,2,3,\cdots,n$.

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(C_i)$ 最小.

定义 1 称

$$\alpha_0 = \frac{\max\limits_{i,j} |\omega(C_i)-\omega(C_j)|}{\max\limits_{i} \omega(C_i)}$$

为该分组的实际均衡度. α 为最大容许均衡度.

显然 $0\leqslant\alpha_0\leqslant1$，$\alpha_0$ 越小，说明分组的均衡性越好. 取定一个 α 后，α_0 与 α 满足条件(3)的分组是一个均衡分组. 条件(4)表示总巡视路线最短.

此问题包含两方面：第一，对顶点分组；第二，在每组中求最佳推销员回路，即为单个推销员的最佳推销员问题.

由于单个推销员的最佳推销员回路问题不存在多项式时间内的精确算法，故多个推销员的问题也不存在多项式时间内的精确算法. 而图中节点数较多，为 53 个，我们只能去寻求一种较合理的划分准则，对图 13－9 进行初步划分后，求出各部分的近似最佳推销员回路的权，再进一步进行调整，使得各部分满足均衡性条件(3).

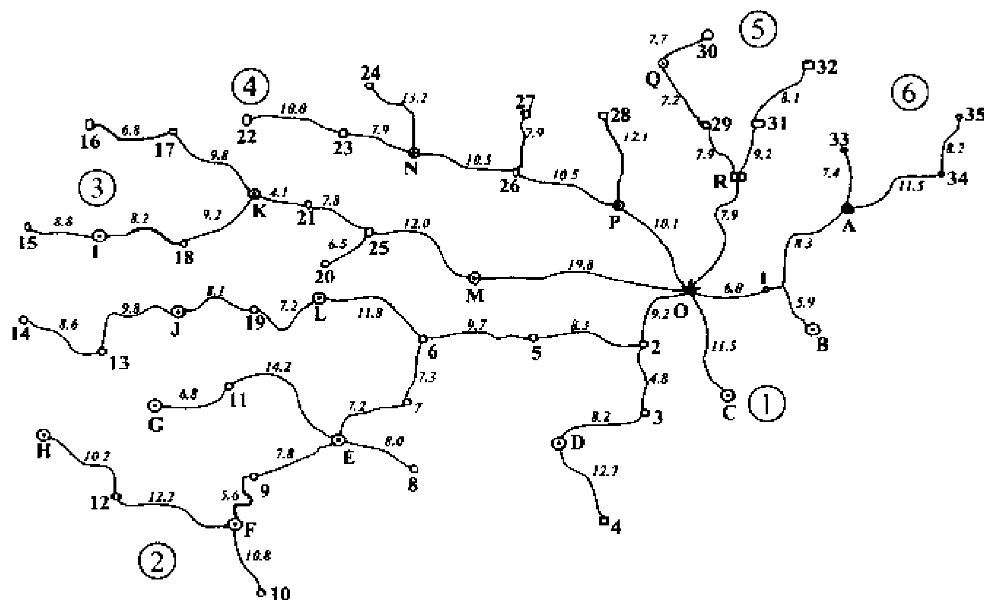


图 13－10　O 点到任意点的最短路图(单位：km)

从 O 点出发去其他点，要使路程较小应尽量走 O 点到该点的最短路. 故用图论软件包求出 O 点到其余顶点的最短路，这些最短路构成一棵 O 为树根的树，将从 O 点出发的树枝称为干枝，见图 13－10. 从图中可以看出，从 O 点出发到其他点共有 6 条干枝，它们的名称分别为①，②，③，④，⑤，⑥.

根据实际工作的经验及上述分析，在分组时应遵从以下准则：

准则一：尽量使同一干枝上及其分枝上的点分在同一组；

准则二：应将相邻的干枝上的点分在同一组；

准则三：尽量将长的干枝与短的干枝分在同一组.

由上述分组准则，我们找到两种分组形式如下：

分组一：(⑥，①)，(②，③)，(⑤，④)

分组二：(①，②)，(③，④)，(⑤，⑥)

显然分组一的方法极不均衡，故考虑分组二.

对分组二中每组顶点的生成干图，用算法一求出近似最优解及相应的巡视路线. 使用算法一

时,在每个子图所构造的完备图中,取一个尽量包含图 13－10 中树上的边的 H 圈作为其第 2 步输入的初始圈.

分组二的近似解见表 13－1.

表 13－1 (单位:km)

小组名称	路　　线	总路线长度	路线的总长度
Ⅰ	$O-P-28-27-26-N-24-23-22-17-16-I-15-I-18-K-21-20-25-M-O$	191.1	558.5
Ⅱ	$O-2-5-6-L-19-J-11-G-13-14-H-12-F-10-F-9-E-7-E-8-4-D-3-C$	241.9	
Ⅲ	$O-R-29-Q-30-32-31-33-35-34-A-B-1-O$	125.5	

因为该分组的均衡度

$$\alpha_0=\frac{\omega(C_1)-\omega(C_2)}{\max\limits_{i=1,2,3}\omega(C_i)}=\frac{241.9-125.5}{241.9}=54.2\%$$

所以此分法的均衡性很差.

为改善均衡性,将第Ⅱ组中的顶点 $C,2,3,D,4$ 分给第Ⅲ组(顶点 2 为这两组的公共点),重新分组后的近似最优解见表 13－2.

表 13－2 (单位:km)

编号	路　　线	路线长度	路线总长度
Ⅰ	$O—P—28—27—26—N—24—23—22—17—16—I—15—I—18—K—21—20—25—M—O$	191.1	599.8
Ⅱ	$O—2—5—6—7—E—8—E—9—F—10—F—12—H—14—13—G—11—J—19—L—6—5—2—O$	216.4	
Ⅲ	$O—R—29—Q—30—32—31—33—35—34—A—1—B—C—3—D—4—D—3—2—O$	192.3	

因该分组的均衡度

$$\alpha_0=\frac{\omega(C_3)-\omega(C_1)}{\max\limits_{i=1,2,3}\omega(C_i)}=\frac{216.4-191.1}{216.4}=11.69\%$$

所以这种分法的均衡性较好.

问题二 当巡视人员在各乡(镇)、村的停留时间一定,汽车的行驶速度一定,要在 24 h 内完成巡视,至少要分几组及最佳的巡视路线.

由于 $T=2$ h,$t=1$ h,$V=35$ km/h,需访问的乡镇共有 17 个,村共有 35 个. 计算出在乡(镇)

及村的总停留时间为 $17\times2+35=69$ h,要在 24 h 内完成巡回,若不考虑行走时间,有:$\frac{69}{i}<24$(i 为分的组数). 得 i 最小为 4,故至少要分 4 组.

由于该网络的乡(镇)、村分布较为均匀,故有可能找出停留时间尽量均衡的分组,当分 4 组时各组停留时间大约为$\frac{69}{4}=17.25$ h,则每组分配在路途上的时间大约为

$$24-17.25=6.75\ \text{h}$$

而前面讨论过,分三组时有个总路程 599.8 km 的巡视路线,分 4 组时的总路程不会比599.8 km 大太多,不妨以 599.8 km 来计算. 路上时间约为$\frac{599.8}{35}=17$ h,若平均分配给 4 个组,则每个组约需

$$\frac{17}{4}=4.25\text{h}<6.75\ \text{h}$$

故分成 4 组是可能办到的.

现在尝试将顶点分为 4 组. 分组的原则:除遵从前面准则一、二、三外,还应遵从以下准则:

准则四:尽量使各组的停留时间相等.

用上述原则在图 13-10 上将图分为 4 组,同时计算各组的停留时间,然后用算法一算出各组的近似最佳推销员巡回,得出路线长度及行走时间,从而得出完成巡视的近似最佳时间. 用算法一计算时,初始圈的输入与分三组时同样处理.

这 4 组的近似最优解见表 13-3.

表 13-3　　(路程单位:km;时间单位:h)

组名	路　线	路线总长度	停留时间	行走时间	完成巡视的总时间
Ⅰ	O—2—5—6—7—**E**—8—E—11—G—12—H—**12**—F—10—**F**—9—**E**—**7**—**6**—**5**—**2**—O	195.8	17	5.59	22.59
Ⅱ	O—[R]—29—Q—30—**Q**—28—27—26—N—24—23—22—17—16—**17**—[K]—**22**—**23**—**N**—**26**—P—O	199.2	16	5.69	21.69
Ⅲ	O—M—25—20—21—K—18—I—15—14—13—J—19—L—[6]—**M**—O	159.1	18	4.54	22.54
Ⅳ	O—R—A—33—31—32—35—34—B—1—C—3—D—4—**D**—**3**—[2]—O	166	18	4.74	22.74

上表中符号说明:加有底纹的表示前面经过并停留过,此次只经过不需停留;加框的表示此点只经过不停留.

该分组实际均衡度 $\alpha_0 = \dfrac{22.74 - 21.69}{22.74} = 4.62\%$.

可以看出,表 13－3 分组的均衡度很好,且完全满足 24h 完成巡视的要求.

13.4 习 题

1. 求图 13－11 所示图的欧拉巡回.

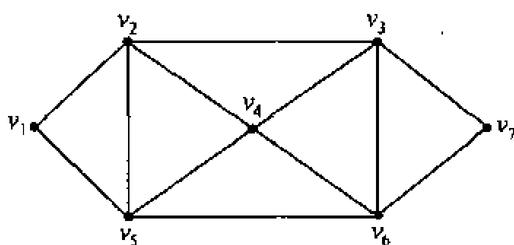


图 13－11

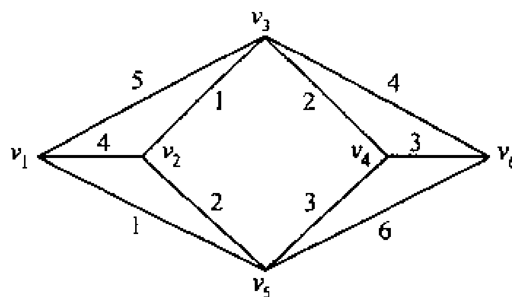


图 13－12

2. 求图 13－12 所示网络的最佳巡回.
3. 求解如下 TSP 问题,距离矩阵 $\boldsymbol{D}$ 如下:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \infty & 34 & 2 & 50 & 59 \\ 34 & \infty & 36 & 68 & 67 \\ 2 & 36 & \infty & 51 & 60 \\ 50 & 68 & 51 & \infty & 13 \\ 59 & 67 & 60 & 13 & \infty \end{bmatrix}$$

4. 有四个工件等待在同一台机器上加工,若加工的先后次序可以任意,各工件之间的调整时间如下表,试确定最优加工顺序.

从＼到	A	B	C	D
A	－	15	20	5
B	30	－	30	15
C	25	25	－	15
D	20	35	10	－

第 14 章　网络流问题

14.1　网络及网络流

现实生活中，人们经常见到一些网络，如铁路网、公路网、通信网、运输网等等. 这些网络有一个共同的特点，就是在网络中都有物资、人或信息等某种量从一个地方流向另一地方，如何安排这些量的流动以便取得最大效益是一个很有意义的实际问题.

定义 1　称 $N=(V,E,c,X,Y)$ 为一个**网络**，如果

(1) $G=(V,E)$ 是一个有向图；

(2) c 是 E 上的非负函数，称为**容量函数**，对每条边 e，$c(e)$ 称为边 e 的**容量**；

(3) X 与 Y 是 V 的两个非空不相交子集，分别称为 G 的**发点集**与**收点集**，$I=V\backslash(X\cup Y)$ 称为 G 的**中间点集**. X 的顶点称为**发点**或**源**，Y 的顶点称为**收点**或**汇**，I 的顶点称为**中间点**.

若 $|X|>1$，$|Y|>1$，称 N 为多源多汇网络；若 $|X|=1$，$|Y|=1$，则称 N 为单源单汇网络.

定义 2　设 N 是一个网络，f 是 E 上的非负函数，如果

(1) $0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$，$e\in E$；

(2) $\sum\limits_{e\in N^+(v)} f(e) = \sum\limits_{e\in N^-(v)} f(e)$，$v\in I$，

其中 $N^+(v)$ 表示 v 的所有出弧的集，$N^-(v)$ 表示 v 的所有入弧的集，则称 f 是网络 N 的一个**流**，$f(e)$ 是边 e 的**流量**. 条件(1)称为**容量约束**，表示通过边的流量不能超过该边的容量；条件(2)称为**守恒条件**，表示在每个中间点，流进与流出该顶点的总流量相等，即保持中间点的流量平衡.

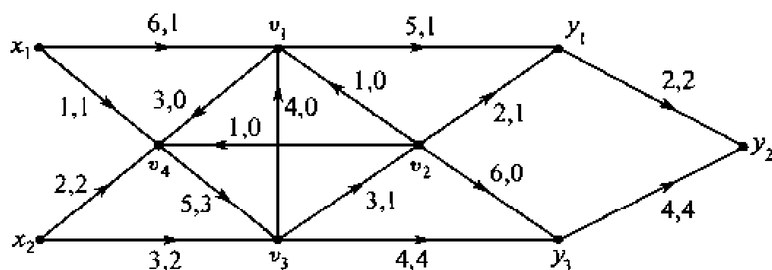


图 14－1　网络及网络流

例 1　图 14－1 表示一个网络及网络流，其中发点集

$$X=\{x_1,x_2\}$$

收点集

$$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$$

中间点集

$$I = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

每条弧上的前一个数字表示容量,后一个数字表示流量.

设 $A \subseteq V$,引入记号

$$f^+(A) = \sum_{e \in N^+(A)} f(e)$$

$$f^-(A) = \sum_{e \in N^-(A)} f(e)$$

则守恒条件可写为

$$f^+(v) = f^-(v),\ v \in I$$

显然,任一网络至少存在一个流,如零流($f(e)=0$,$e \in V$).

定义 3 设 f 是网络 N 的一个流,$A \subseteq V$,则称 $f^+(A) - f^-(A)$ 为**流出 A 的净流量**,称 $f^-(A) - f^+(A)$ 为**流入 A 的净流量**.

显然,流入、流出任何中间点的净流量为 0.

引理 设 f 是网络 N 的一个流,则

$$f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y)$$

即流出发点集 X 的净流量等于流入收点集 Y 的净流量.

定义 4 设 f 是网络 N 的一个流,则 f 的**流的价值** $\mathrm{val}\,f$ 定义为

$$\mathrm{val}\,f = f^+(X) - f^-(X)$$

即流的价值是发点集的流出量,也是收点集的流入量.

例如,图 14-1 中网络 N 的流的价值为

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,f &= f(x_1,v_1) + f(x_1,v_4) + f(x_2,v_3) + f(x_2,v_4)\\ &= f(v_1,y_1) + f(v_2,y_1) + f(v_2,y_3) + f(v_3,y_3)\\ &= 6\end{aligned}$$

任何一个网络 $N=(V,E,c,X,Y)$,都等价于单源单汇网络,记为

$$N' = (V',E',c',s,t)$$

(1) $V' = V \cup \{s,t\}$,s 与 t 分别是 N' 的发点与收点,

(2) $E' = E \cup \{(s,x) \mid x \in X\} \cup \{(y,t) \mid y \in Y\}$,

(3) $c' = c(e)$,$e \in E$;$c'(s,x) = \infty$,$x \in X$;$c'(y,t) = \infty$,$y \in Y$.

在解决实际问题时,常把多源多汇网络转化为单源单汇网络. 例如图 14-1 所示的网络等价于图 14-2 所示的单源单汇网络.

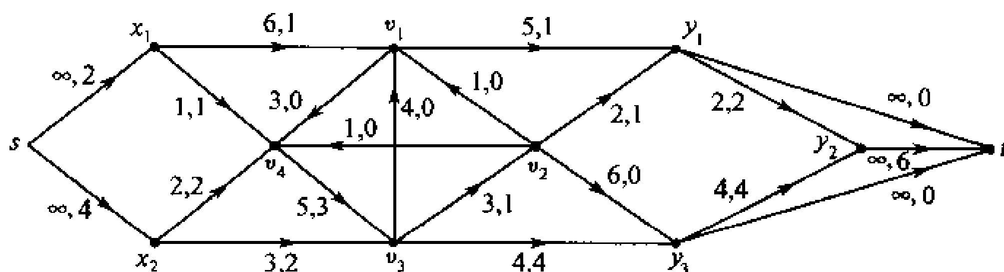


图 14-2 单源单汇网络

对于单源单汇网络 $N=(V,E,c,s,t)$，有

$$\mathrm{val}\,f=f^{+}(s)=f^{-}(t)$$

在图 14－2 中，

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,f&=f(s,x_1)+f(s,x_2)\\&=f(y_1,t)+f(y_2,t)+f(y_3,t)\\&=6\end{aligned}$$

今后讨论的网络没有特殊说明均指单源单汇网络. 下面介绍网络流的应用.

14.2 最大流问题

在许多实际问题中，都涉及最大流问题. 如某煤矿通过运输网络将煤运送到某城市，其最大运送量是多少等. 本节介绍最大流问题及与之相关的最小割问题.

14.2.1 定义

定义 1 设 $N=(V,E,c,s,t)$ 是一个网络，f 是一个流，若不存在流 f'，使

$$\mathrm{val}\,f'>\mathrm{val}\,f$$

则称 f 为 N 的**最大流**.

若 $A\subseteq V, s\in A, t\in \bar{A}=V-A$，则

$$(A,\bar{A})=N^{+}(A)$$

称为网络 N 的一个**割**，而

$$\mathrm{cap}(A,\bar{A})=\sum\{c(e)\mid e\in(A,\bar{A})\}$$

称为割 $(A,\bar{A})$ 的**容量**. 设 K 是一个割，若不存在割 K'，使

$$\mathrm{cap}\,K'<\mathrm{cap}\,K$$

则称 K 为 N 的**最小割**.

注：割是由 A 到 $\bar{A}$ 的有向弧组成的.

14.2.2 最大流与最小割的关系

定理 1 设 f 是网络 N 的流，$(A,\bar{A})$ 是一个割，则

(1) $\mathrm{val}\,f=f^{+}(A)-f^{-}(A)$；

(2) $\mathrm{val}\,f\leqslant\mathrm{cap}(A,\bar{A})$.

定理 2 设 f 是流，K 是割，若 $\mathrm{val}\,f=\mathrm{cap}\,K$，则 f 是最大流，K 是最小割.

定理 3 网络 N 的最大流的价值等于最小割的容量.

14.2.3 增广链及最大流算法

定义 2 若 f 为网络 N 上的一个流，对 $e\in E$，

(1) 若 $f(e)=c(e)$，则称 e 为 f 的**饱和弧**；

(2) 若 $f(e)<c(e)$，则称 e 为 f 的**不饱和弧**；

(3) 若 $f(e)>0$，则称 e 为 f 的**正弧**；

(4) 若 $f(e)=0$，则称 e 为 f 的**零弧**.

定义 3 若 P 是网络 N 中从发点 s 到收点 t 的一条初等链（点、边不重复的有向路），定义链的方向为从 s 到 t，则链上的弧（有向边）分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫做**正向弧**；另一类弧与链的方向相反，叫做**反向弧**. 正向弧的全体记为 P^+，反向弧的全体记为 P^-.

设 $l(P)=\min\limits_{e\in E(P)} l(e)$，其中

$$l(e)=\begin{cases} c(e)-f(e), & e\in P^+ \\ f(e), & e\in P^- \end{cases}$$

若 $l(P)=0$，则称链 P 为 f－**饱和链**；若 $l(P)>0$，则称链 P 为 f－**非饱和链**.

定义 4 设 f 是一个流，P 是 s 到 t 的一条链，若 P 满足下列条件：

(1) 在弧 $e\in P^+$ 上，$0\leqslant f(e)<c(e)$，即 P^+ 中每一条弧都是非饱和弧；

(2) 在弧 $e\in P^-$ 上，$0<f(e)\leqslant c(e)$，即 P^- 中每一条弧都是非零弧，

则称 P 为关于流 f 的一条**增广链**.

显然，一条 f－增广链就是一条从发点 s 到收点 t 的 f－非饱和链. 在网络中存在一条 f－增广链，表明 f 不是最大流. 事实上，沿着 P 附加上流 $l(P)$，便得到一个新的流 f'，其定义如下：

$$f'(e)=\begin{cases} f(e)+l(P), & e\in P^+ \\ f(e)-l(P), & e\in P^- \\ f(e), & \text{其他} \end{cases}$$

对于这个新的流，有 $\mathrm{val}\, f'=\mathrm{val}\, f+l(P)$，称为基于 P 的改进流. 我们有：

定理 4 f 是网络 N 的最大流的充要条件是 N 不含 f－增广链.

此定理给出了求最大流的基本思想和方法.

最大流算法的基本思想：

判别网络 N 中当前给定的流 f（初始时，取 f 为零流）是否存在增广链，若没有，则该流 f 为最大流；否则，求出 f 的改进流 f'，把 f' 看成 f，再进行判断和计算，直到找到最大流为止.

算法（标号法）：

1. 对任意的弧 $e=(x,y)\in E$，置 $f(x,y)=0$；标发点为 (s^+,∞)，令 $\delta_s=\infty$.

2. 若点 x 已标号，则对与 x 相邻的未标号的点 y，按下法标号：

a. $(x,y)\in E$，当 $f(x,y)<c(x,y)$ 时，令

$$\delta_y=\min\{c(x,y)-f(x,y),\delta_x\}$$

给 y 标 (x^+,δ_y)；当 $f(x,y)=c(x,y)$ 时，不给 y 标号.

b. $(y,x)\in E$，当 $f(y,x)>0$ 时，令

$$\delta_y=\min\{f(y,x),\delta_x\}$$

给 y 标(x^{-1},δ_y)；当 $f(y,x)=0$ 时，不给 y 标号.

3. 重复 2 直至收点 t 被标号或不存在可标号的点. 若 t 被标号，则转 4；若 t 不能被标号且不存在可以标号的点，则停止，输出 f_r.

4. 令 $u=t$.

5. 若 u 的标号为(v^+,δ_u)，则令

$$f(v,u)=f(v,u)+\delta_t$$

若 u 的标号为(v^-,δ_u)，则令

$$f(v,u)=f(v,u)-\delta_t$$

6. 若 $v=s$，则去掉除发点 s 的所有点的标号，转 2；否则令 $u=v$，转 5.

算法的第 2～3 步为标号过程，第 4～6 步为增流过程. 标号(x^+,δ_y)表示从 x 流入 y 的流可增加 δ_y，(x^{-1},δ_y)表示从 y 流入 x 的流可减少 δ_y，(s^+,∞)表示发点可提供任意多的流量到别的点.

算法终止后，令已标号的点的集合为 S，则割$(S,\bar{S})$即为最小割，从而最大流的流量 $\mathrm{val}\,f=\mathrm{cap}(S,\bar{S})$.

例 1　求图 14－3 中网络 $N=(V,E,c,s,t)$ 的最大流.

解　(1) 对所有$(x,y)\in E$，令 $f(x,y)=0$，如图 14－4(a)各边的第二个数. 标 s 为(s^+,∞).

(2) 对 s 的邻接点 a，标$(s^+,3)$. 这里因 s 指向 a，故 s 的上标为＋，又

$$\begin{aligned}\delta_a&=\min\{\infty,c(s,a)-f(s,a)\}\\&=\min\{\infty,3-0\}\\&=3\end{aligned}$$

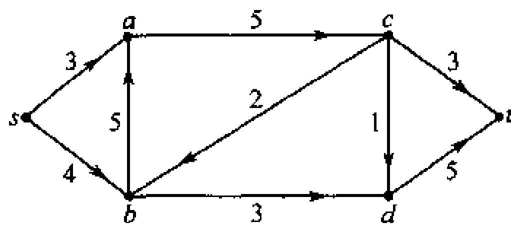


图 14－3

同理，对 s 的邻接点 b，标$(s^+,4)$，如图 14－4(a).

(3) 对与 a 相邻的点 c，标$(a^+,3)$；与 b 相邻的点 d，标$(b^+,3)$；与 c 相邻的点 t，标$(c^+,3)$. 此时 $\delta_t=3$，同时得增广链 $sact$，如图 14－4(b).

将边(s,a)、(a,c)和(c,t)各边的流量增加 δ_t(即 3)，再去掉各点(除 s 点)的标号，得图 14－4(c).

(4) 由图 14－4(c)重新标号得图 14－4(d)，路 $sbdt$ 为增广链，$\delta_t=3$，再将此路中各边的流量增加 3 后删去标号得图 14－4(e).

(5) 同理由(e)得(f)再得(g)，由(g)得最大流 $\mathrm{val}\,f=7$.

14.2.4　最大流问题的推广

现实问题中的网络，不但边有容量，而且点也有容量. 例如运输网络中表中转站的点 v，点容量 $c(v)$ 可表示该中转站能容纳的货物的数量. 对点有容量的网络 N，流函数若满足对一点 v，流入 v 的流量之和等于流出 v 的流量之和，并且小于等于 $c(v)$，则可将 N 化为顶点无容量的网络问题，其方法为：

1. 将点 v 分成两个点 v_1 与 v_2.

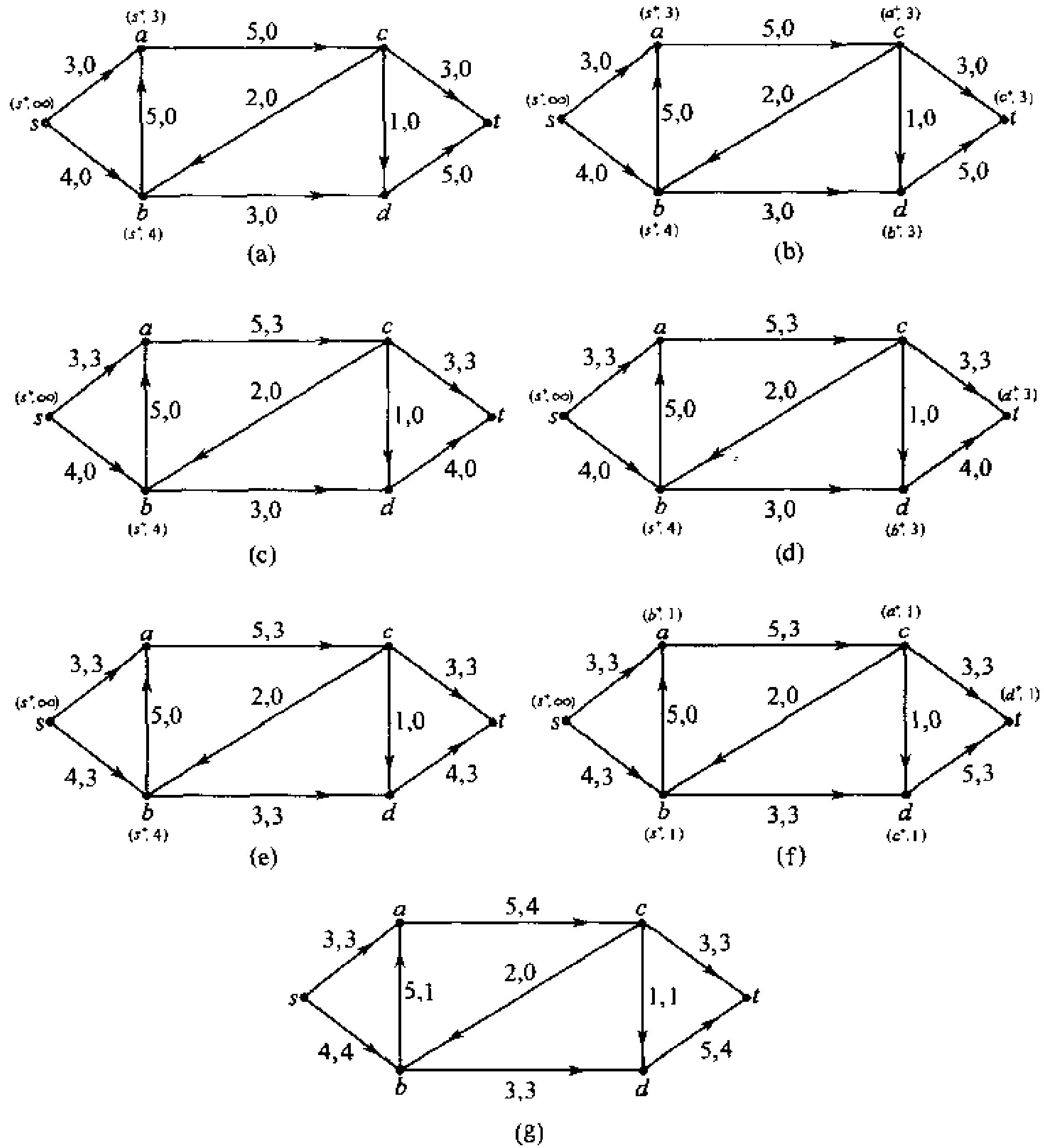


图 14－4

2. 作新边(v',v'')，令$c(v',v'')=c(v)$.

3. 将原图中所有形如(x,v)的边改为(x,v')，所有形如(v,y)的边改为(v'',y). 类似可将点x、y以及所有顶点转化为无容量顶点.

14.3 最小费用流问题

14.3.1 可行流

在有些实际问题中，网络图不仅应考虑流量，而且应考虑费用. 即网络中的每条边与两个数

对应,其中一个数表示容量;另一个数表示运送单位流量所需费用等,我们来讨论这种网络的流.

定义 1 设 $N=(V,E,b,c,s,t)$ 是每边具有两个非负权的网络,f 是定义在 E 上的实值函数,满足

(1) 对任意的 $(x,y)\in E$,有

$$b(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y)$$

其中 $b(x,y)$,$c(x,y)$ 均为边 (x,y) 的权;

(2) 对所有中间点 v,恒有 $f^{+}(v)=f^{-}(v)$,

则称 f 为 N 的**可行流**.

普通网络中的流总存在,如零流. 而网络 $N=(V,E,b,c,s,t)$ 的可行流就不一定存在,例如图 14-5 所示的网络不存在可行流,因为允许流进 a 的最大流为 4,而流出 a 的流量至少应为 6.

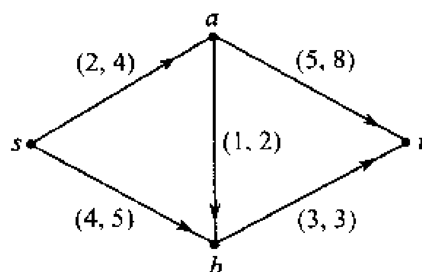


图 14-5

14.3.2 求最大可行流的算法

类似上节,也有**标号算法**:

1. 求初始可行流 f,若存在,则标发点为 (s^{+},∞),令 $\delta_s=\infty$,转 2;否则停止.

2. 若点 x 已标号,则对与 x 相邻的所有未标号的点 y,按下法标号:

a. 若 $f(x,y)<c(x,y)$,令

$$\delta_y=\min\{c(x,y)-f(x,y),\delta_x\}$$

给 y 标 (x^{+},δ_y);当 $f(x,y)=c(x,y)$ 时,不给 y 标号;

b. 若 $f(y,x)>b(y,x)$,令

$$\delta_y=\min\{f(y,x)-b(y,x),\delta_x\}$$

给 y 标 (x^{-1},δ_y).

以下同求最大流的算法第 3~6 步.

以上算法的基本思想与求最大流的算法相同,只不过求最大流是从零流出发找增广链,而求最大可行流算法是从初始可行流出发找增广链.

14.3.3 初始可行流的构造

为求初始可行流,将网络 $N=(V,E,b,c,s,t)$ 转化为每边仅有一个权的网络 $N^{*}=(V^{*},E^{*},c^{*},s^{*},t^{*})$,其中:

1. 点集 $V^{*}=V\cup\{s^{*},t^{*}\}$,其中 s^{*} 是 N^{*} 的唯一发点,t^{*} 是 N^{*} 的唯一收点.

2. 边集 $E^{*}=E\cup\{(t,s)\}\cup E_{s^{*}}\cup E_{t^{*}}$,其中

$$E_{s^{*}}=\{(s^{*},y)_x\mid(x,y)\in E\}$$

$$E_{t^{*}}=\{(x,t^{*})_y\mid(x,y)\in E\}$$

3. 边权的定义:

a. 对 $(x,y)\in E$,$c^{*}(x,y)=c(x,y)-b(x,y)$;

b. $c^{*}(t,s)=\infty$;

c. 对$(s^*,y)_x \in E_{t*}$，$c^*(s^*,y)=b(x,y)$；

d. 对$(x,t^*)_y \in E_{t*}$，$c^*(x,t^*)=b(x,y)$.

定理 网络N中存在可行流的充要条件是N^*中存在使E_{t*}中的所有边都饱和的最大流，其中流f饱和边(x,y)是指$f(x,y)=c(x,y)$.

求初始可行流的步骤：

1. 由N构造N^*，再将N^*简化，即将N^*中两端点均相同的边合并为一条边，被合并的边的容量相加作为合并后的边的容量.

2. 用标号法求N^*的最大流f^*.

3. 检查E_{t*}的边是否饱和，若存在不饱和的边，则停止（不存在可行流）；否则继续.

4. 对$(x,y)\in E(N)$，令$f(x,y)=f^*(x,y)+b(x,y)$得N的初始可行流.

14.3.4 最小费用流

第11章讨论了无向图中求最短路的算法，此算法也适用于有向图. 特别地，若将图中的边权取为费用，则最短路转化为最小费用通路. 而实际问题中，我们考虑的网络，要使流值一定的情况下，费用尽量小.

例1 图14-6(a)所示的网络，每条边上第一个数表示容量，第二个数表示单位费用；图14-6(b)，(c)，(d)中分别给出了流值为4的3个流，每条边上的3个数从左到右分别表示边的流量、容量与费用. 三个网络的总费用分别为28，24与15. 换言之，流值相同，而费用却不同. 问题是如何求最小费用流？

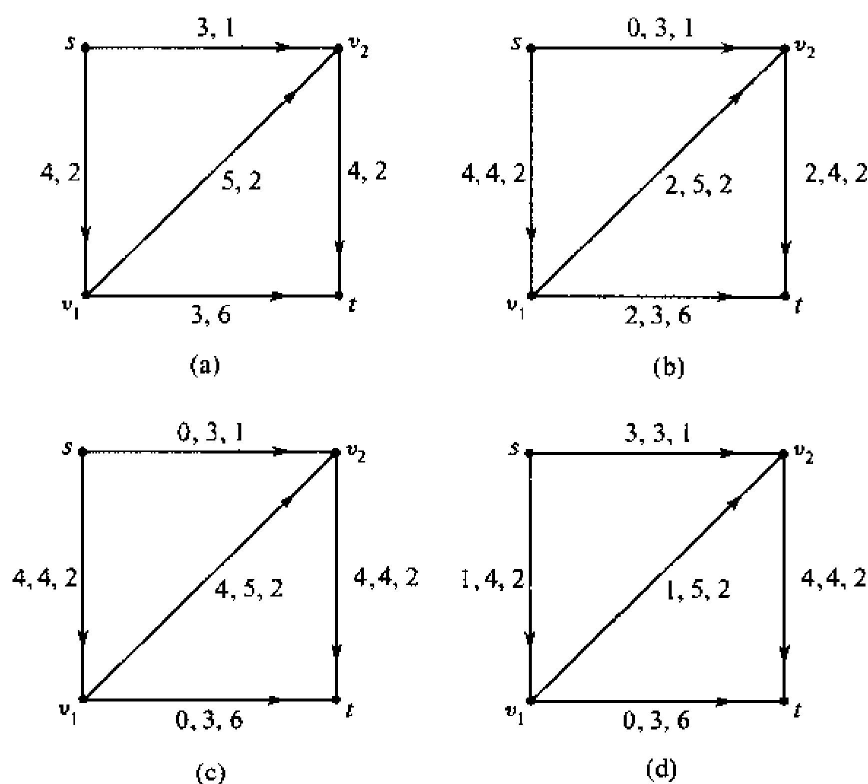


图14-6

最小费用流问题　给定网络 N,已知总的流值为 val f,问如何以最小费用将量为 val f 的"物品"从发点 s 送到收点 t.

设 $w(i,j)$、$c(i,j)$ 和 $f(i,j)$ 分别表示边 (i,j) 的单位流费用、容量和流量,val $f=\lambda$,则上述问题的模型为:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} w(i,j)f(i,j)$$

其中 f 应满足约束:对任意的 $(i,j)\in E$,有

$$\sum_j f(i,j)-\sum_j f(j,i)=\begin{cases}\lambda, & i=s\\ 0, & i\neq s,t\\ -\lambda, & i=t\end{cases}$$

注:[1] 若 val f 为最大流,则问题为最小费用最大流问题(通常简称为最小费用流问题).

[2] 若 val f 大于最大流,则问题无解.

最小费用流问题的算法:

1. 求发点 s 到收点 t 的最小费用通路 $P(s,t)$,记该通路的边集合为 $E(P)$.

2. 给 $P(s,t)$ 分配最大可能流量 $f_0=\min\{c(x,y)\mid(x,y)\in E(P)\}$. 对所有的 $(x,y)\in E(P)$,令 $c(x,y)=c(x,y)-f_0$;对 $E(P)$ 饱和的边,将单位费用流改为 ∞,且当 x 或 $y\neq s$ 或 t 时,将饱和边 (x,y) 变为反向边 (y,x),令

$$c(y,x)=f_0,\quad w(y,x)=-w(x,y)$$

构成新网络.

3. 在新网络中重复 1 ~2,直至从发点到收点的流值等于 λ 或再找不到最小费用通路(此时为最小费用最大流).

例 2　求图 14 -7 网络中的最小费用流. 图中每边上第一个数字是容量 $c(i,j)=c_{ij}$,第二个数字是单位流费用 $w(i,j)$.

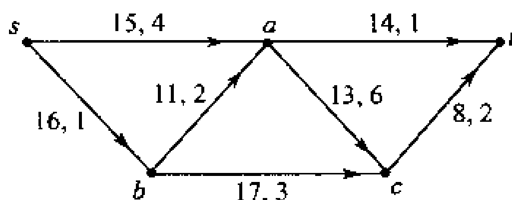


图 14 -7

解　(1) 求 s 到 t 的最小费用通路 $sbat$,如图 14 -8(a). 单位费用和

$$w_{sb}+w_{ba}+w_{at}=1+2+1=4$$

本路径中可分配的最大流 $f_0=11$,边 (b,a) 饱和.

(2) 在上述最小费用通路中的每边的 c_{ij} 中减去 11,去掉边 (b,a),作反向边 (a,b),且 $c(a,b)=f_0$,$w(a,b)=-2$,如图 14 -8(b). 在新网络中求最小费用通路 sat,$ws_a+wa_t=5$,$f_0=3$,边 (a,t) 饱和.

(3) 在 sat 路中,每边的容量减 3,$w_{at}=\infty$,如图 14 -8(c). 求最小费用通路 $sbct$,单位流费用和为 6,$f_0=5$,边 (s,b) 饱和.

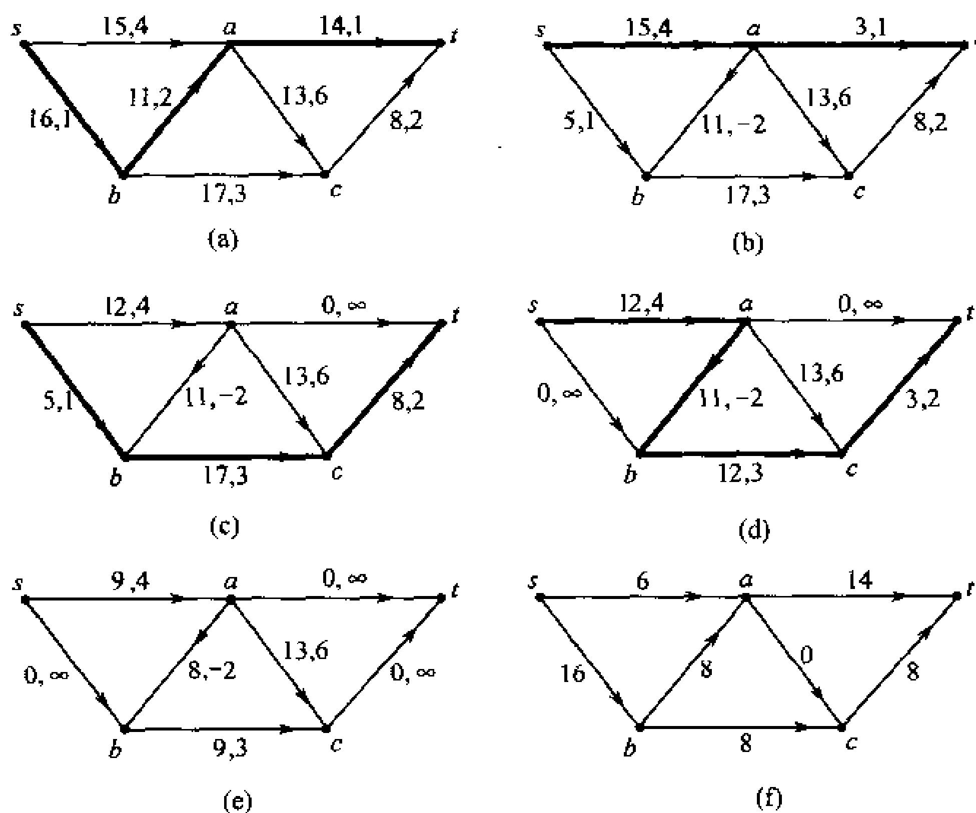


图 14－8

(4) 在 $sbct$ 路中，每边的容量减 5，$w_{sb}=\infty$，如图 14—8(d)．在(d)中，最小费用通路为 $sabct$，单位流费用和为 $4+(-2)+3+2=7$，$f_0=3$，边 (c,t) 饱和．

(5) 在 $sabct$ 路中，每边的容量减 3，$w_{sb}=\infty$，如图 14－8(e)．在(e)中再也找不到 s 到 t 的最小费用通路，算法结束．

综合以上结果，网络中流的分配如图 14－8(f)．

于是，从 s 到 t 的流为：

$$\mathrm{val}\, f = 11+3+5+3 = 22$$

最小费用为：

$$6\times4+14\times1+16\times1+8\times2+8\times2+8\times3+0\times6=110$$

14.4 习 题

1．求图 14－9 所示网络的最大流，边上的数字是边容量．

2．一制造商需要把两个车间 D_1，D_2 生产的同类商品通过运输网络输送到三个销售点 M_1，M_2，M_3 去，如图 14－10 所示．设各销售点计划销售量分别为 10，8，8，问网络的运输能力能否满足这一要求？两个车间生产数量多少最为恰当？

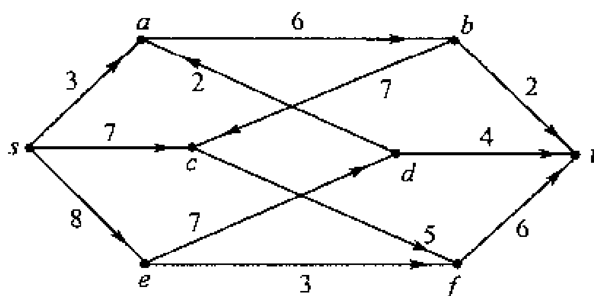


图 14－9

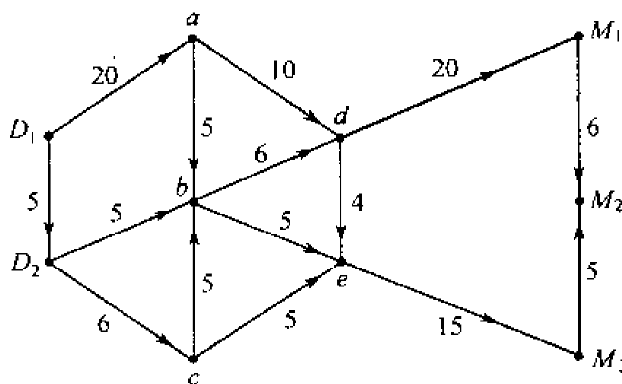


图 14－10

3. 7 种设备要用 5 架飞机运往目的地，每种设备各有 4 台，这 5 架飞机的容量分别为 8，8，5，4，4 台，问能否有一种装载法，使同一种类型的设备不会有两台在同一架飞机上.

4. 设有王二、张三、李四、赵五四人及小提琴、大提琴、钢琴和吉他四种乐器，已知四人的特长如下：

王二擅长拉大提琴和弹钢琴；
张三擅长拉小提琴、大提琴和吉他；
李四擅长拉小提琴和大提琴；
赵五只会弹吉他.

今假设四人同台演出，每人奏一种乐器，问四人同时各演奏一种乐器时所有可能的方案，试把此问题化为最大流问题.

5. 求图 14－11 的流值为 5 的最小费用流.

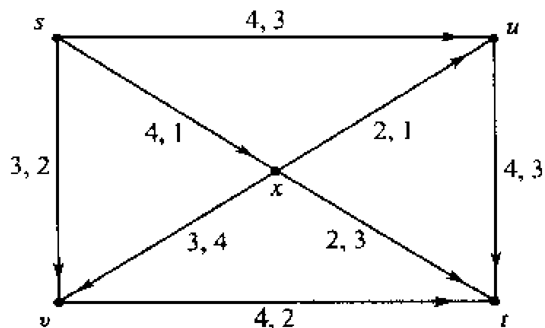


图 14－11

6. 某厂有 2 个车间——部件车间与组装车间，先由部件车间生产部件，再由组装车间组装成成品. 部件车间每月最多生产 10 个部件，其产品送人库房，每月初组装车间到库房领取部件，预见今后 5 个月对部件的需求量与生产每个部件所耗工时如表 14－1. 假

定开始和第 5 个月月末的库存数都是零,试用网络方法求解下列问题.

(1) 列出工时最少的部件生产计划;

(2) 若库房容量为 9 个部件,试列出工时最少的部件生产计划.

表 14-1

月	1	2	3	4	5
需求量(件)	—	8	5	7	4
工时(件/h)	11	16	13	17	—

第 15 章　数据的统计描述和分析

数理统计学是以概率论为基础,从实际观测资料出发,研究如何合理地搜集资料(数据)来对随机变量的分布函数、数字特征等进行估计、分析和推断.更具体地说:数理统计学是研究从一定总体中随机抽出一部分(称样本或子样)的某些性质,以此对所研究总体的性质作出推测性的判断.

15.1　统计的基本概念

15.1.1　总体与样本

直观地说,我们所研究对象的全体叫做**总体**.而组成总体的每个单元叫做**个体**.例如,我们研究一万件某种球形产品的直径是否符合设计标准 20mm,这一万个数据的全体就是一个总体,而某一件产品的直径是一个个体.

任何一个总体,都可以用一个随机变量来描述它.所以,总体就是一个带有确定概率分布的随机变量,总体的概率分布就是该随机变量的概率分布.用 X、Y、Z 等表示总体.

为了对总体 X 的分布律进行各种所需的研究,就必须对总体进行抽样观察,根据抽样观察所得结果来推断总体的性质.这种从总体 X 中抽取若干个体来观察某种数量指标 X 的取值过程,称为**抽样**.

从一个总体 X 中,随机地抽取 n 个个体 $X_1,X_2,\cdots,X_n$(例如,在一万件产品中抽取 50 件),这样取得的$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为总体 X 的一个**样本**.样本中个体的数目 n 称为**样本容量**.样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个 n 维随机变量,一次抽取的结果是 n 个具体的数据$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称为样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一个观测值,简称**样本观测值**.一般来说,不同的抽取(每次取 n 个)将得到不同的样本观测值(即两批不同的 n 个数据).

从总体中抽取样本,一般应满足下述两个条件:

(1) **随机性**,即对于每一次抽样,总体中每一个个体都有同样的机会被抽取.

(2) **独立性**,即每次抽取的结果既不影响其他各次抽取的结果,也不受其他各次抽取结果的影响.

这种随机的、独立的抽样方法称为**简单随机抽样**,由此得到的样本称为**简单随机样本**.

简单地说,统计的任务是由样本推断总体.但是如果对总体一无所知,推断就很困难.通常的做法是,可以根据某种理由或经验假定总体所服从的概率分布的形式,而只要由样本推断总体概率分布中的若干参数.

15.1.2　统计量

样本是总体的代表及反映.但在抽取样本后,并不直接利用样本的 n 个观察值进行推断,而

需对这些值进行一番加工、提炼. 把样本中所包含的我们关心的事物的信息集中起来，这便是针对不同问题构造样本的某种函数，这种不包含未知参数的样本函数称为统计量.

对容量为 n 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其常用的统计量如下：

1. 表示位置的统计量——**平均值和中位数**

平均值(或均值，数学期望)：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

中位数：将数据由小到大排序后位于中间位置的那个数值.

2. 表示变异程度的统计量——**标准差、方差和极差**

标准差：$s=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]^{\frac{1}{2}}$，它是各个数据与均值偏离程度的度量.

方差：标准差的平方.

极差：样本中最大值与最小值之差.

3. 表示分布形状的统计量——**偏度和峰度**

$$\text{偏度}:g_1=\frac{1}{s^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3,\quad \text{峰度}:g_2=\frac{1}{s^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^4$$

偏度反映分布的对称性，$g_1>0$ 称为右偏态，此时数据位于均值右边的比位于左边的多；$g_1<0$称为左偏态，情况相反；而 g_1 接近 0 则可认为分布是对称的.

峰度是分布形状的另一种度量，正态分布的峰度为 3，若 g_2 比 3 大很多，表示分布有沉重的尾巴，说明样本中含有较多远离均值的数据，因而峰度可用作衡量偏离正态分布的尺度之一.

4. k **阶原点矩**：$V_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

5. k **阶中心矩**：$U_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

15.1.3 分布函数的近似求法

设 X 是一个随机变量，若总体分布未知，怎样利用样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来近似地求出它的分布密度函数？常用的方法是**直方图**.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，又设总体 X 具有概率密度 f，如何用样本来推断 f？注意到现在的样本是一组实数，因此一个直观的办法是将实轴划分为若干个小区间，记下诸观测值落在每个小区间的个数，根据大数定理中频率近似概率的原理，从这些个数来推断总体在每一小区间上的密度. 下面介绍具体作法：

1. 整理资料：把样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 进行分组，先将它们依大小次序排列，得 $x_1^*\leqslant x_2^*\leqslant\cdots\leqslant x_n^*$. 在包含 $[x_1^*,x_n^*]$ 的区间 $[a,b]$ 内插入一些等分点：$a<x'_1<x'_2<\cdots<x'_k<b$，注意要使每一个区间 $(x'_i,x'_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$ 内都有样本观测值 x_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 落入其中.

2. 求出各组的频数和频率：统计出样本观测值在每个区间 $(x'_i,x'_{i+1}]$ 中出现的次数 n_i，它就是这区间或这组的频数. 计算频率 $f_i=\frac{n_i}{n}$.

3. 作频率直方图：在直角坐标系的横轴上，标出 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_k$ 各点，分别以 $(x'_i,x'_{i+1}]$ 为底

边，作高为$\frac{f_i}{\Delta x_i'}$的矩形，$\Delta x_i' = x_{i+1}' - x_i'$，$i = 1,2,\cdots,n-1$，即得频率直方图. 此图大致描述了 X 的概率分布情况，因为每个竖着的长方形的面积，刚好近似地代表了 X 取值落入"底边"的概率.

有了频率直方图，就能大致描绘出分布密度曲线，让曲线大致经过每个竖着的长方形的"上边"，就得出分布密度曲线的大致模样（例如看起来像正态分布、指数分布等）.

X 是否就符合上面所假设的分布律呢？可用 15.3 所介绍的非参数假设检验来进行验证，尤其应用概率纸是非常简便易行的. 然后用 15.2 所介绍的方法对分布密度的参数进行估计. 最后用 15.3 所介绍的参数检验的方法对估计的参数进行检验（参见 15.4 例 11）.

15.1.4　几个在统计中常用的概率分布

下面介绍统计中几个常用的概率分布.

1. 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

密度函数：$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

分布函数：$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$.

其中 μ 为均值，σ^2 为方差，$-\infty < x < +\infty$. 特别地，当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称其为标准正态分布，记为 $N(0,1)$，相应的密度函数及分布函数分别记为 $\varphi(x)$ 及 $\Phi(x)$：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,\qquad -\infty < x < +\infty$$

正态分布是概率统计中最重要的一种分布. 一方面，正态分布是自然界最常见的一种分布，例如测量的误差、人的身高、体重、产品的尺寸等都近似服从正态分布；另一方面，正态分布具有许多良好的性质，许多分布可用正态分布来近似，另外一些分布又可通过正态分布来导出.

正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,2^2)$ 的密度函数图形见图 15－1.

2. 分布 $\chi^2(n)$

若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则随机变量

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $Y \sim \chi^2(n)$.

χ^2 分布的密度函数图形见图 15－2.

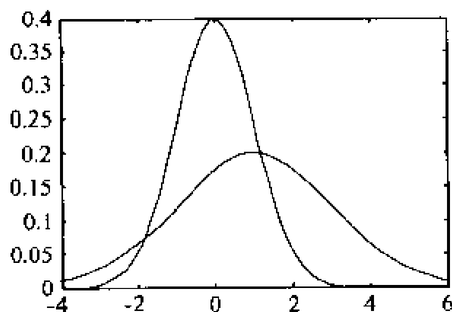


图 15－1

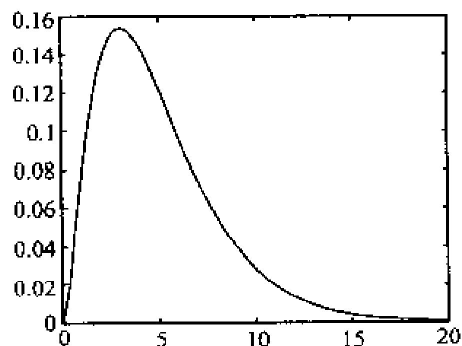


图 15－2

χ^2 分布具有以下性质：

定理 1 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$.

定理 2 （χ^2 分布的可加性） 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立，则

$$\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$$

3. t 分布 $t(n)$

若 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且相互独立，则随机变量

$$T=\frac{T}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $T \sim t(n)$.

$t(20)$ 分布的密度函数曲线见图 15－3，它和 $N(0,1)$ 的曲线形状相似. 理论上 $n \to \infty$ 时，$T \sim t(n)$ 近似于标准正态分布 $N(0,1)$.

4. F 分布 $F(n_1,n_2)$

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，且相互独立，则随机变量

$$F=\frac{X}{n_1}\Big/\frac{Y}{n_2}$$

服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记作 $F \sim F(n_1,n_2)$. $F(10,50)$ 分布的密度函数曲线见图 15－4.

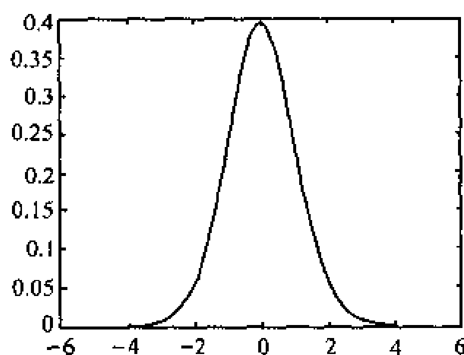


图 15－3

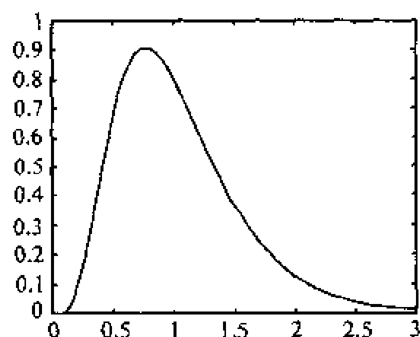


图 15－4

由 F 分布的定义可以得到 F 分布的一个重要性质：若 $F \sim F(n_1,n_2)$，则

$$\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$$

15.1.5 正态总体统计量的分布

研究数理统计的问题时，往往需要知道所讨论的统计量 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布. 一般说来，要确定某个统计量的分布是困难的，有时甚至是不可能的. 然而，对于总体 X 服从正态分布的情形已经有了详尽的研究.

1. 单个正态总体统计量的分布

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一容量 n 的样本，其均值为 $\bar{X}$，标准差为 s，则有

(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 或 $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

(2) $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

(3) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

2. 两个正态总体的统计量的分布

分别从总体 X 和总体 Y 中抽取容量为 n_1 和 n_2 的样本

$$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1} \quad 和 \quad Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$$

假设所有的抽样都是相互独立的,由此得到的样本 $X_i(i=1,2,\cdots,n_1)$ 与 $Y_j(j=1,2,\cdots,n_2)$ 都是相互独立的随机变量. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,取自两个总体的样本均值分别为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$,样本方差分别为 s_1^2 和 s_2^2,则有:

(1) $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$. 特别地,若 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$,则

$$U = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2) $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$,其中

$$s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

(3) $F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

15.2 参数估计

15.2.1 定义

无论总体 X 的分布函数 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的类型已知或未知,我们总是需要去估计某些未知参数或数字特征,这就是参数估计问题. 即参数估计就是从样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 出发,构造一些统计量 $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots,k)$ 去估计总体 X 中的某些参数(或数字特征)$\theta_i(i=1,$

$2,\cdots,k$). 这样的统计量称为**估计量**.

对于未知参数的估计可分为两种:

1. **点估计**:构造$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的函数$\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$作为参数$\theta_i$的点估计量,称统计量$\hat{\theta}_i$为总体$X$参数$\theta_i$的点估计量.

2. **区间估计**:构造两个函数$\theta_{i1}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\theta_{i2}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$做成区间,把$(\theta_{i1},\theta_{i2})$作为参数$\theta_i$的区间估计.

15.2.2 点估计的求法

1. 矩估计法

假设总体分布中共含有k个参数,它们往往是一些原点矩或一些原点矩的函数,例如,数学期望是一阶原点矩,方差是二阶原点矩与一阶原点矩平方之差等. 因此,要想估计总体的某些参数$\theta_i(i=1,2,\cdots,k)$,由于k个参数一定可以表为不超过k阶原点矩的函数,很自然就会想到用样本的r阶原点矩去估计总体相应的r阶原点矩,用样本的一些原点矩的函数去估计总体的相应的一些原点矩的函数,再将k个参数反解出来,从而求出各个参数的估计值. 这就是**矩估计法**,它是最简单的一种参数估计法.

例 1 设总体X的分布密度为

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

样本为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,试用矩估计法求λ的估计量$\hat{\lambda}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

解 因$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,\lambda)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$,用样本均值$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$去估计总体均值$E(X)=\frac{1}{\lambda}$,则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}=\frac{1}{\hat{\lambda}}$$

所以

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

例 2 设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,其中μ及σ^2都是未知参数,样本为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,求μ及σ^2的矩估计值.

解 因为总体X的分布中有两个未知参数,所以应该考虑一、二阶原点矩:

$$V_1=E(X)=\mu$$

$$V_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$$

于是,按矩估计法得方程组

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

解得 μ 及 σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

由此可见，总体均值 $E(X)$ 的矩估计值是样本均值 $\bar{X}$，总体方差 $D(X)$ 的矩估计值是样本二阶中心矩. 从解题过程易知，这个结论不仅对正态总体成立，而且无论总体 X 服从什么分布，只要总体的均值与方差存在，上述结论都是成立的.

可以证明，当样本容量 n 无限增大时，样本矩与其相应的总体矩任意接近的概率趋于 1. 因此当 n 无限增大时，用矩法来估计总体各个参数一定可以达到任意精确的程度. 除上述优点外，矩法还不依赖于总体分布的具体形式，因而适用性好. 其缺点是由于此法太一般化了，因而对特定的一些分布，它可能不如专门的估计量好.

2. 极大似然估计法

无论总体分布类型已知或未知，对其参数的估计，矩法都是可行的. 若总体分布类型已知，则估计它的参数最好用极大似然法.

极大似然法的直观想法是：若抽样的结果得到样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则我们应当这样选取参数 θ_i 的值，使这组样本观测值出现的可能性最大. 即构造似然函数：

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n) \\ &= p(x_1, \theta_1, \cdots, \theta_k)p(x_2, \theta_1, \cdots, \theta_k)\cdots p(x_n, \theta_1, \cdots, \theta_k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta_1, \cdots, \theta_k) \end{aligned}$$

使 $L(\theta_1, \cdots, \theta_k)$ 达到最大，从而得到参数 θ_i 的估计值 $\hat{\theta}_i$. 此估计值叫做**极大似然估计值**. 函数 $L(\theta_1, \cdots, \theta_k)$ 称为**似然函数**，对于已取定的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，它是未知参数 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 的函数. 对离散随机变量，上式中的 p 为分布列；对连续随机变量，上式中的 p 为密度函数.

求极大似然估计值的问题，就是求似然函数 $L(\theta_1, \cdots, \theta_k)$ 的最大值的问题，此问题可通过解以下方程组：

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

来解决. 也等价于解以下方程组：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

例 3　设总体 X 服从指数分布，概率密度为

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, & x < 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

其中 λ 为未知参数，若取得样本观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求参数 λ 的极大似然估计值.

解　似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-x_i/\lambda} = \lambda^{-n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\lambda}$$

取对数,得

$$\ln L(\lambda) = -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

求导,得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

由此解得的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

3. 估计量的评价标准

从上面的讨论可以看出,参数估计的方法有多种,用不同的方法得到的估计量不一定相同.到底孰优孰劣? 这就涉及评价估计量优良性的标准.

由于估计量作为样本的函数是一个随机变量,所以对不同的样本观测值,其估计量的观测值也不同.因此,一个估计量的优劣就不能仅凭一次观测结果,而要根据估计量的统计规律来评价.直观上讲,一个好的估计量其观测值应在待估参数的真值附近摆动,且摆动的幅度越小越好.即应使估计量与待估参数在某种统计意义下非常"接近".为此,介绍几个常用的评选标准.

(1) 无偏性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量,若 $E(\hat{\theta})=\theta$,则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计**.记 $b_n=E(\hat{\theta})-\theta$,称 b_n 为估计量 $\hat{\theta}$ 的**偏差**,当 $b_n\neq 0$ 时,称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**有偏估计**,若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$,则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**渐近无偏估计**.

例如,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,总体 X 的均值 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$,则可以证明:样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计;样本方差 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计.但应该注意,总体方差 σ^2 的矩估计 $\hat{s}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是有偏估计,这是因为

$$E(\hat{s}^2) = E\left(\frac{n}{n-1}s^2\right) = \frac{n}{n-1}E(s^2) = \frac{n}{n-1}\sigma^2$$

可见 $\hat{s}^2$ 为 σ 的渐近无偏估计,故当 n 比较大时,取 s^2 和 $\hat{s}^2$ 作为 σ^2 的估计皆可.

从实际应用的角度看,无偏估计的意义在于:当该估计量经常地使用时,它保证了在多次重复的平均意义下,给出接近于真值的估计.如果应用上的要求主要在于这一点,无偏性的要求当然是合理而且必须的.例如,某工厂生产一种产品,从较长时期来看,其废品率大约为 p_0.现在对每天生产的产品作抽样检验以估计.就逐日的结果而言,自然难免偏高偏低,但如果估计量是无偏的,在使用了几个月以后,将全部结果平均,就能得出很接近于 p_0 的估计.所以,如果该厂每日将全部产品卖给一家商店,而该店是按每日抽样废品率的大小来付款的,则就某一日而言,两方中有一方可能吃一点亏,但无偏性保证了从较长时期看,该交易是公平的.在这里,无偏性当然是合理而且是必要的要求.但是在不少应用中,不仅问题没有这样的经常性,或者正、负偏差不能抵

消，这时，无偏性就没有多大的意义了.

因此，一方面，无偏性是一个重要而有用的概念；另一方面，应当根据问题的性质来估价它的作用，而不能拘泥于它.

(2) 有效性

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，$\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，若

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

例如，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，则 $X_1, \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 都是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计量，但当 $n \geq 2$ 时，

$$D(X_1) = D(X) > D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X)$$

所以 $\bar{X}$ 比 X_1 有效.

这样，在无偏估计类中，方差越小越好. 故引入以下定义：

定义 1 设 $\hat{\theta}_0$ 是参数 θ 的无偏估计量，若对 θ 的任一无偏估计量 $\hat{\theta}$，都有

$$D(\hat{\theta}_0) \leq D(\hat{\theta})$$

则称 $\hat{\theta}_0$ 是 θ 的**最小方差无偏估计量**.

(3) 一致性

估计量 $\hat{\theta}$ 是与样本容量有关的，为了明确起见，不妨记作 $\hat{\theta}_n$. 我们当然希望当 n 充分大时，$\hat{\theta}_n$ 的值稳定在 θ 的附近. 于是给出第三个标准：一致性.

如果对于任意 $\varepsilon > 0$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$，则称 θ 的估计量 $\hat{\theta}_n$ 是一致的. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} E(|\hat{\theta}_n - \theta|^r) = 0$ 对某 $r \geq 0$ 成立时，$\hat{\theta}_n$ 是 θ 的 r **一致估计量**.

例如，设总体 X 的均值 $E(X) = \mu$，方差 $D(X) = \sigma^2$，则可以证明：样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的一致估计量，样本方差 s^2 是总体方差 σ^2 的一致估计量.

综上所述，可知样本均值 $\bar{X}$ 与样本方差 s^2 分别是总体均值 μ 与总体方差 σ^2 的无偏、一致估计量. 因此，对这些数字特征的点估计比较容易.

15.2.3 区间估计的求法

参数 θ 的点估计值只是 θ 的一个近似值. 在实际问题中，不仅需要求出 θ 的近似值，而且还需要大致估计这个近似值的精确性与可靠性.

设总体 X 的分布中含有未知参数 θ，若对于给定的概率 $1-\alpha(0<\alpha<1)$，存在两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$ 称为**置信下限**，$\hat{\theta}_2$ 称为**置信上限**.

分位数是数理统计中常用的一个概念，现给出它的定义.

定义 2 设 X 的分布函数为 F，x_α 满足

$$F(x_\alpha) = P\{X < x_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

则称 x_α 为 F 的 α **分位数**.

1. 数学期望的置信区间

(1) 已知方差 $D(X)$,求 $E(X)$的置信区间

设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$来自正态母体 X,已知方差 $D(X)=\sigma^2$,则由于

$$U=\frac{\bar{X}-E(X)}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

在置信水平 $1-\alpha$ 给定后,根据正态分布的对称性,取 $N(0,1)$的 $1-\frac{\alpha}{2}$分位数 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,满足

$$P\{|U|\leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$$

即

$$P\{\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant E(X)\leqslant\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha$$

所以 $E(X)$在置信水平 $1-\alpha$ 下的置信区间为$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

用$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$作为 $E(X)$的置信区间,其条件是 X 服从正态分布,且已知方差 $D(X)=\sigma^2$. 但在有些问题中,并不预先知道 X 服从什么分布,此时只要样本容量 n 足够大,仍可用$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$作为 $E(X)$的置信区间. 这是因为由中心极限定理可知,无论 X 服从什么分布,当 n 充分大时,随机变量 $\eta=\frac{\bar{X}-E(X)}{\sigma/\sqrt{n}}$就近似服从标准正态分布 $N(0,1)$. 至于 n 多大才算充分大,没有绝对的标准,一般 n 不能小于 50,最好 100 以上.

(2) 未知方差 $D(X)$,求 $E(X)$的置信区间

用 $D(X)$ 的估计值即样本方差 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 来代替 $D(X)$. 利用

$$\frac{\bar{X}-E(X)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$$

由于 t 分布也是对称的,故取 $t(n-1)$的 $1-\frac{\alpha}{2}$分位数 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$,就有

$$P\left\{\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\leqslant E(X)\leqslant\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

所以 $E(X)$在置信水平 $1-\alpha$ 下的置信区间为$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

2. 方差的区间估计

设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$来自正态母体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,现要用样本方差 s^2 对总体方差 σ^2 进行区间估计. 由于 $\eta=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,选取$\chi^2$ 分布的$\frac{\alpha}{2}$分位数$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$和 $1-\frac{\alpha}{2}$分位数$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$,满足

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right\}=1-\alpha$$

所以 $D(X)$ 在置信水平 $1-\alpha$ 下的置信区间为 $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$.

在具体计算时，因 $(n-1)s^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $D(X)$ 在置信水平 $1-\alpha$ 下的置信区间可直接写成 $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$，$\sigma$ 的置信区间则可取上述置信限的平方根.

15.3 假 设 检 验

15.3.1 定义

对总体 X 的分布律或分布参数作某种假设，根据抽取的样本观察值，运用数理统计的分析方法，检验这种假设是否正确，从而决定接受假设或拒绝假设，这就是**假设检验**问题.

假设检验依问题的性质常分为两大类型：

1. **参数检验**：如果观测的分布函数类型已知，这时构造出的统计量依赖于总体的分布函数，这种检验称为参数检验. 参数检验的目的往往是对总体的参数及有关性质作出明确的判断.

2. **非参数检验**：如果所检验的假设并非是对某个参数作出明确的判断，因而必须要求构造出的检验统计量的分布函数不依赖于观测值的分布函数类型，这种检验叫做非参数检验. 如要求判断总体分布类型的检验就是非参数检验.

假设检验的一般步骤是：

(1) 根据实际问题提出原假设 H_0 与备择假设 H_1，即说明需要检验的假设的具体内容；

(2) 选择适当的统计量，并在原假设 H_0 成立的条件下确定该统计量的分布；

(3) 按问题的具体要求，选取适当的显著性水平 α，并根据统计量的分布查表，确定对应于 α 的临界值；(一般 α 取 0.05，0.01 或 0.10.)

(4) 根据样本观测值计算统计量的观测值，并与临界值进行比较，从而在检验 α 水平条件下对拒绝或接受原假设 H_0 作出判断.

15.3.2 参数检验

1. 单个正态总体均值检验

设取出一容量为 n 的样本，得到均值 $\bar{X}$ 和标准差 s，现要对总体均值 μ 是否等于某给定值 μ_0 进行检验. 记

$$H_0:\ \mu=\mu_0;\quad H_1:\ \mu\neq\mu_0$$

称 H_0 为原假设，H_1 为备择假设，两者择其一：接受 H_0；拒绝 H_0，即接受 H_1. 再选定一个显著性水

平 α,它是在 H_0 成立的条件下被错误拒绝的概率.

分总体方差已知和未知两种情况讨论.

(1) 总体方差 σ^2 已知

若 H_0 成立,则 $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,故

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

在 H_0 不成立时,$|z|$的观察值有偏大的趋势.故对给定的显著性水平为使犯第二种错误的概率最小,取 $N(0,1)$ 的$1-\frac{\alpha}{2}$分位数 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,使 $P\{|z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$.检验的拒绝域为

$$W = \left\{ |z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \quad \text{即} \quad W = \left\{ z < -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{或} z > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

这种检验称为 u 检验.

上述拒绝域是小于第一个给定数而大于第二个给定数的所有数值的集合,称为**双侧检验**.但有一类实际问题要检验的是形如 $\mu \geqslant \mu_0$ 或 $\mu \leqslant \mu_0$ 的假设.例如,经过工艺改革后,考虑产品的质量是否比以前提高.此时,假设为:

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu > \mu_0$$

仍利用前面的 z 作为检验统计量.但这时只有当 $\bar{X} > \mu_0$ 时,才有可能认为产品的质量有了提高.因此,对给定的显著性水平 α,这个检验的拒绝域为

$$W = \{z > u_{1-\alpha}\}$$

这种检验的拒绝域是大于(或小于)某给定数的所有数值的集合,称为**单侧检验**.

类似地,对假设

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu < \mu_0$$

的检验,在给定的显著性水平 α 下,其拒绝域为

$$W = \{z < -u_{1-\alpha}\}$$

这也是一个单侧检验.

(2) 总体方差 σ^2 未知

此时用样本方差 s^2 代替总体方差 σ^2.讨论方法与总体方差 σ^2 已知的情况类似.这种检验叫 **t 检验**.结果见下表:

	H_0	H_1	总体方差 σ^2 已知 统计量 $z = \frac{X - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	总体方差 σ^2 未知 统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
			在显著性水平 α 下拒绝 H_0,若	
Ⅰ	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\|z\| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\|t\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
Ⅱ	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$z > u_{1-\alpha}$	$t > t_{1-\alpha}(n-1)$
Ⅲ	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$z < -u_{1-\alpha}$	$t < -t_{1-\alpha}(n-1)$

2. 单个正态总体方差检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，欲检验假设：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (\text{或 } \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ 或 } \sigma^2 < \sigma_0^2)$$

这叫 χ^2 检验. 其结果见下表：

	H_0	H_1	均值 μ 已知 统计量 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \mu)^2$	均值 μ 未知 统计量 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \bar{X})^2$
			在显著性水平 α 下拒绝 H_0，若	
I	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$	$\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
II	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n)$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
III	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}(n)$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$

3. 两个正态总体均值的检验

以上均值和方差的检验是对单一样本而言，实际问题中还会遇到比较两组数据，即对两个总体进行假设检验的问题，例如检验两个车间生产的灯泡的寿命是否相同. 这类问题归结为两正态总体的均值检验.

设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 独立地分别取自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，检验假设：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2; \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 (\text{或 } \mu_1 > \mu_2 \text{ 或 } \mu_1 < \mu_2)$$

(1) σ_1^2 与 σ_2^2 已知时

构造统计量 $z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$. 则当 H_0 成立时，$z \sim N(0,1)$.

对于给定的显著性水平 α，查正态分布表得 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$，取拒绝域 $W = \left\{ |z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$，这时犯第二类错误的概率最小.

(2) σ_1^2 与 σ_2^2 未知但相等时

讨论方法完全与前面一致. 分别用两样本方差 s_1^2 与 s_2^2 代替 σ_1^2 与 σ_2^2. 构造统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

则在 H_0 成立时，$t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$. 给定检验水平 α 时，拒绝域为

$$W = \left\{ |t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

将上述检验结果列表如下.

	H_0	H_1	方差 σ_1^2,σ_2^2 已知 统计量 z	方差 σ_1^2,σ_2^2 未知但相等 统计量 t
			在显著性水平 α 下拒绝 H_0,若	
Ⅰ	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$\lvert z\rvert>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert t\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
Ⅱ	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$z>u_{1-\alpha}$	$t>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
Ⅲ	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$z<-u_{1-\alpha}$	$t<-t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$

4. 两个正态总体方差的检验

前面在检验两个总体均值 $\mu_1=\mu_2$ 时,是在两总体的方差已知或虽未知但相等的条件下进行的,但如何得出总体方差未知但相等的结论呢?这就需要考虑两总体方差的检验.

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,检验假设:

$$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2(\text{或 } \sigma_1^2>\sigma_2^2 \text{ 或 } \sigma_1^2<\sigma_2^2)$$

结果见下表:

	H_0	H_1	均值 μ_1,μ_2 已知 统计量 F_0	均值 μ_1,μ_2 未知 统计量 F
			在显著性水平 α 下拒绝 H_0,若	
Ⅰ	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F_0>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F_0<\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)}$	$F>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)}$
Ⅱ	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F_0>F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$	$F>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
Ⅲ	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F_0<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$	$F<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2-1,n_1-1)}$

其中:

$$F_0=\frac{\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}, \quad F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\ (\text{设 } s_1^2\geqslant s_2^2)$$

5. 非正态总体大样本参数检验

设非正态总体 X 具有有限方差 DX,并假定样本容量足够大.由中心极限定理,随机变量

$$z = \frac{\overline{X} - E(X)}{\sqrt{\frac{D(X)}{n}}}$$

的分布将近似地为正态分布 $N(0,1)$. 因此若总体分布只含一个参数,就可利用统计量 z 作假设检验.

15.3.3　非参数检验

前面讨论了总体分布已知时的参数假设检验问题. 一般来说,在进行参数假设检验之前,需要对总体的分布进行推断. 这就是总体分布的拟合检验问题,它属于非参数检验.

已知总体 X 的样本分布函数 $F_n(x)$,若选用某个分布函数 $F_0(x)$ 去拟合,则无论如何选择,$F_0(x)$ 与 $F_n(x)$ 之间总存在某些差异. 自然就会提出这样的问题:这些差异仅仅是由于试验次数有限而导致的随机性所产生的呢? 还是由于所选择的分布函数 $F_0(x)$ 与已知样本分布函数 $F_n(x)$ 之间存在实质性的差异而产生的呢? 为了解决这个问题,数理统计中有几种不同的拟合法,这里仅介绍最常用的皮尔逊 χ^2 拟合检验法和概率纸检验法.

1. 皮尔逊 χ^2 拟合检验法

此法主要是通过检验各组实测频数与理论频数差异的大小来推断经验分布是否服从任何一个预先给定的分布. 其根据就是用各组实测数据与理论频数的差异构成一个符合 χ^2 分布的统计量,并用此统计量来进行假设检验. 使用此法时要求样本容量较大,并在分组中,每组的理论频数至少不小于 5.

设总体分布(理论分布)为 $F(x)$,取自总体的样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,现在的问题是用此组样本来检验假设:

$$H_0: F(x) = F_0(x), \text{其中 } F_0(x) \text{ 是某个给定的分布函数.}$$

具体作法是:

(1) 数据分组:把样本值出现的范围,划为 k 组:

$$(b_0, b_1], (b_1, b_2], \cdots, (b_{k-1}, b_k), \text{其中 } -\infty = b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-1} < b_k = +\infty$$

(2) 求各组的频数:统计各组的频率 $\frac{f_i^*}{n}$ (f_i^* 表示 $(b_{i-1}, b_i]$ 内的频数).

(3) 求理论频率 p_i:当 H_0 为真时,X 出现在 $(b_{i-1}, b_i]$ 中的频率为:

$$p_i = P\{b_{i-1} < X \leqslant b_i\} = F_0(b_i) - F_0(b_{i-1})$$

(4) 作统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i^*}{n} - p_i\right)^2 \frac{n}{p_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i^* - np_i)^2}{np_i}$$

可以证明:不论 F_0 为什么分布,当 H_0 为真时,只要 n 充分大,χ^2 统计量就近似地服从自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布. 对给定的检验水平 α,可查得 χ^2 分布的 $1-\alpha$ 分位数 $\chi_\alpha^2(k-1)$.

(5) 具体计算:用样本值算出统计量 χ^2 的具体值.

(6) 作出判断:当 $\chi^2 \geqslant \chi_{1-\alpha}^2$ 时,则拒绝假设 H_0;否则接受假设 H_0.

应当注意的是,在计算 $p_i = F_0(b_i) - F_0(b_{i-1})$ 时,$F_0(x)$ 必须完全确知才行. 如 $F_0(x)$ 中有 r 个参数还不能确知,可用这些参数的极大似然估计量来代替,使得分布函数 $F_0(x)$ 完全确定,再

按上法进行检验,不过此时 χ^2 的自由度为 $k-r-1$.

2. 概率纸检验法

概率纸是一种判断总体分布的简便工具.使用它们,可以很快地判断总体分布的类型.概率纸的种类很多,这里只介绍检验总体分布是否为正态分布的正态概率纸检验法.

正态概率纸的横坐标是均匀刻度,纵坐标按正态分布律刻度,表示概率.

如果一个总体的分布 $F(X)$ 是正态的,则 $(x,F(x))$ 点在正态概率纸上应呈一条直线.设 X_1,$X_2,\cdots,X_n$ 是从正态总体中抽得的样本观测值,将它们按大小排列后,记作 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$.则当 n 较大时,样本的经验分布函数 $F_n(x)$ 和理论分布 $F(x)$ 很接近.因此,如果用 $(x,F(x))$ 画图,则必应近似为一条直线.

但是,由于随机因素的影响,在正态概率纸上这些点不可能都恰好在一条直线上,与直线有一定的正负偏差.但是,这种偏差不能过大,特别是处于中间的一些点,而两端的点的偏差可允许略大一些.若偏差过大,或呈现某种弯曲的趋势(凸或凹),则这总体分布为正态分布就值得怀疑.

15.4 MATLAB 统计工具箱中的基本统计命令

15.4.1 数据的录入、保存和调用

统计中的数据量往往较大,在交互环境输入后,往往需要保存为数据文件,以便调用来作各种统计分析.下面通过一个实例说明在 MATLAB 中数据的录入、保存和调用的方法.

例 1 上海市区社会商品零售总概和全民所有制职工工资总额的数据如下:

年份	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
职工工资总额(单位:亿元)	23.8	27.6	31.6	32.4	33.7	34.9	43.2	52.8	63.8	73.4
商品零售总额(单位:亿元)	41.4	51.8	61.7	67.9	68.7	77.5	95.9	137.4	155.0	175.0

(1) 年份数据是以 1 为增量的,可用产生向量的方法来输入.

命令格式为 x=a:h:b,即产生从 a 到 b,以 h 为增量的行向量,当 h 缺省时,认为增量为 1,h 也可以是负数.可用以下命令输入年份数据:

```
t=78:87
```

(2) 分别以 x 和 y 代表变量职工工资总额和商品零售总额,以向量的形式输入如下:

```
x=[23.8,27.6,31.6,32.4,33.7,34.9,43.2,52.8,63.8,73.4]
y=[41.4,51.8,61.7,67.9,68.7,77.5,95.9,137.4,155.0,175.0]
```

(3) 将变量 t、x、y 的数据保存在文件 data 中,用以下命令:

```
save data t x y
```

(4) 进行统计分析时,用以下命令调用数据文件 data 中的数据:

```
load data
```

也可用矩阵的形式输入和保存数据,方法如下:

(1) 输入矩阵:

```
data=[78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88;
23.8,27.6,31.6,32.4,33.7,34.9,43.2,52.8,63.8,73.4;
41.4,51.8,61.7,67.9,68.7,77.5,95.9,137.4,155.0,175.0]
```

(2) 将矩阵 data 的数据保存在文件 data1 中:save data1 data

(3) 进行统计分析时,先用命令:

```
load data1
```

调用数据文件 data1 中的数据,再用以下命令分别将矩阵 data 的第一、二、三行的数据赋给变量 t、x、y:

```
t=data(1,:)
x=data(2,:)
y=data(3,:)
```

若要调用矩阵 data 的第 j 列的数据,可用命令:

```
data(:,j)
```

15.4.2 基本统计量

对随机变量 X,计算其基本统计量的命令如下:

均　值:mean(x)	中位数:median(x)
标准差:std(x)	方　差:var(x)
偏　度:skewness(x)	峰　度:kurtosis(x)

15.4.3 常见概率分布的函数

MATLAB 统计工具箱中有 20 种概率分布,常见的几种分布的命令字符为:

正态分布:norm	指数分布:exp	泊松分布:poiss
β 分布:beta	威布尔分布:weib	
χ^2 分布:chi2	t 分布:t	F 分布:F

工具箱对每一种分布都提供五类函数,其命令字符为:

概率密度:pdf

概率分布:cdf

逆概率分布:inv

均值与方差:stat

随机数生成:rnd

当需要一种分布的某一类函数时,将以上所列的分布命令字符与函数命令字符接起来,并输入自变量(可以是标量、数组或矩阵)和参数即可.如对均值为 mu、标准差为 sigma 的正态分布,举例如下:

1. 密度函数:p=normpdf(x,mu,sigma) (当 mu=0,sigma=1 时可缺省)

例 2 画出正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(0,2^2)$ 的概率密度函数图形.

在 MATLAB 中输入以下命令:

```
x = -6:0.01:6; y = normpdf(x); z = normpdf(x,0,2);
plot(x,y,x,z)
```

可得图 15-5.

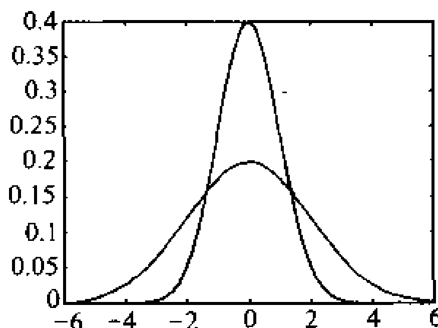


图 15-5 正态分布的密度函数

2. 概率分布:P = normcdf(x,mu,sigma)

例 3 计算标准正态分布的概率 $P\{-1<X<1\}$.

命令为:P = normcdf(1) - normcdf(-1)

结果为:P = 0.6827

3. 逆概率分布:x = norminv(P,mu,sigma).

即求出 x,使得 $P\{X<x\}=P$. 此命令可用来求分位数.

例 4 取 $\alpha=0.05$,求 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$的含义是:$X\sim N(0,1)$,$P\{X<u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\frac{\alpha}{2}$.

$\alpha=0.05$ 时,$P=0.975$,$u_{0.975}$ = norminv(0.975) = 1.96.

例 5 计算均值 594、标准差 204 的正态分布随机变量的概率 0.01 的分位数.

norminv(0.01,594,204) = 119.4250

4. 均值与方差:[m,v] = normstat(mu,sigma)

例 6 求正态分布 $N(3,5^2)$的均值与方差.

命令为:[m,v] = normstat(3,5).

结果为:m = 3,v = 25.

5. 随机数生成:normrnd(mu,sigma,m,n).产生 $m\times n$ 阶的正态分布随机数矩阵.

例 7 命令:M = normrnd([1 2 3;4 5 6],0.1,2,3).

结果为:M = 0.9567 2.0125 2.8854
         3.8334 5.0288 6.1191

此命令产生一个 2×3 阶正态分布随机数矩阵,第一行三个数分别服从均值为 1,2,3 的正态分布,第二行三个数分别服从均值为 4,5,6 的正态分布,标准差均为 0.1.

应当注意,不同分布的参数是不同的.正态分布的参数是均值 mu 和标准差 sigma,而χ^2 分布和 t 分布的参数都是自由度 n,F 分布的参数是自由度 n_1,n_2. 例如,χ^2 分布的分布函数为:P = chi2cdf(x,n).

15.4.4　频数直方图的描绘

1. 给出数组 data 的**频数表**的命令为:[N,X] = hist(data,k).

此命令将区间[min(data),max(data)]分为 k 个小区间(缺省为 10),返回数组 data 落在每一个小区间的频数 N 和每一个小区间的中点 X.

2. 描绘数组 data 的**频数直方图**的命令为:hist(data,k).

15.4.5　参数估计

1. 正态总体的参数估计

设总体服从正态分布,则其点估计和区间估计可同时由以下命令获得:

[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(X,alpha)

此命令在显著性水平 alpha 下估计数据 X 的参数(alpha 缺省时设定为 0.05),返回值 muhat 是 X 的均值的点估计值,sigmahat 是标准差的点估计值,muci 是均值的区间估计,sigmaci 是标准差的区间估计.

2. 其他分布的参数估计

若无法保证总体服从正态分布,有两种处理办法.一是取容量充分大的样本($n>50$),按中心极限定理,它近似地服从正态分布,仍可用上面的估计公式计算;二是使用 MATLAB 工具箱中具有特定分布总体的估计命令.常见的命令有:

(1) [muhat, muci] = expfit(X,alpha)——在显著性水平 alpha 下,求指数分布的数据 X 的均值的点估计及其区间估计.

(2) [lambdahat, lambdaci] = poissfit(X,alpha)——在显著性水平 alpha 下,求泊松分布的数据 X 的参数 λ 的点估计及其区间估计.

(3) [phat, pci] = weibfit(X,alpha)——在显著性水平 alpha 下,求 Weibull 分布的数据 X 的参数的点估计及其区间估计.

15.4.6　假设检验

在总体服从正态分布的情况下,可用以下命令进行假设检验.

1. 总体方差 σ^2 已知时,总体均值的检验使用 z - 检验

[h,sig,ci] = ztest(x,m,sigma,alpha,tail)

检验数据 x 的关于均值的某一假设是否成立,其中 sigma 为已知方差,alpha 为显著性水平,究竟检验什么假设取决于 tail 的取值:

tail = 0,检验假设"x 的均值等于 m".

tail = 1,检验假设"x 的均值大于 m".

tail = -1,检验假设"x 的均值小于 m".

tail 的缺省值为 0,alpha 的缺省值为 0.05.

返回值 h 为一个布尔值,h = 1 表示可以拒绝假设,h = 0 表示不可以拒绝假设,sig 为假设成立的概率,ci 为均值的 1 - alpha 置信区间.

例 8　MATLAB 统计工具箱中的数据文件 gas.mat 中提供了美国 1993 年 1 月份和 2 月份的汽油平均价格(price1,price2 分别是 1,2 月份的油价,单位为美分),它是容量为 20 的双样本.假设 1

月份油价的标准偏差是一加仑四分币($\sigma=4$),试检验1月份油价的均值是否等于115.

解 作假设:m = 115.首先取出数据,用以下命令:

```
load gas
```

然后用以下命令检验

```
[h,sig,ci] = ztest(price1,115,4)
```

返回:h = 0,sig = 0.8668,ci = [113.3970 116.9030].

检验结果:1. 布尔变量 h = 0,表示不拒绝零假设.说明提出的假设均值 115 是合理的.

2. 95%的置信区间为[113.4, 116.9],它完全包括 115,且精度很高.

3. sig 的值为 0.8668,远超过 0.5,不能拒绝零假设.

所以,可以认为平均油价为 115.

2. 总体方差 σ^2 未知时,总体均值的检验使用 t-检验

```
[h,sig,ci] = ttest(x,m,alpha,tail)
```

检验数据 x 的关于均值的某一假设是否成立,其中 alpha 为显著性水平,究竟检验什么假设取决于 tail 的取值:

tail = 0,检验假设"x 的均值等于 m".

tail = 1,检验假设"x 的均值大于 m".

tail = -1,检验假设"x 的均值小于 m".

tail 的缺省值为 0,alpha 的缺省值为 0.05.

返回值 h 为一个布尔值,h = 1 表示可以拒绝假设,h = 0 表示不可以拒绝假设,sig 为假设成立的概率,ci 为均值的 1 - alpha 置信区间.

例 9 试检验例 8 中 2 月份油价 price2 的均值是否等于 115.

解 作假设:m = 115,price2 为 2 月份的油价,不知其方差,故用以下命令检验

```
[h,sig,ci] = ttest(price2,115)
```

返回:h = 1,sig = 4.9517e-004,ci = [116.8 120.2].

检验结果:1. 布尔变量 h = 1,表示拒绝零假设.说明提出的假设油价均值 115 是不合理的.

2. 95%的置信区间为[116.8 120.2],它不包括 115,故不能接受假设.

3. sig 的值为 4.9517e-004,远小于 0.5,不能接受零假设.

所以,可以认为平均油价不是 115.

3. 两总体均值的假设检验使用 t-检验

```
[h,sig,ci] = ttest2(x,y,alpha,tail)
```

检验数据 x,y 的关于均值的某一假设是否成立,其中 alpha 为显著性水平,究竟检验什么假设取决于 tail 的取值:

tail = 0,检验假设"x 的均值等于 y 的均值".

tail = 1,检验假设"x 的均值大于 y 的均值".

tail = -1,检验假设"x 的均值小于 y 的均值".

tail 的缺省值为 0,alpha 的缺省值为 0.05.

返回值 h 为一个布尔值,h = 1 表示可以拒绝假设,h = 0 表示不可以拒绝假设,sig 为假设成立的概率,ci 为 x 与 y 均值差的 1 - alpha 置信区间.

例 10 试检验例 8 中 1 月份油价 price1 与 2 月份的油价 price2 均值是否相同.

解 用以下命令检验

```
[h,sig,ci] = ttest2(price1,price2)
```

返回:h = 1,sig = 0.0083,ci = [-5.8, -0.9].

检验结果:1. 布尔变量 h = 1,表示拒绝零假设.说明提出的假设"油价均值相同"是不合理的.

2. 95%的置信区间为[-5.8, -0.9],说明 1 月份油价比 2 月份油价约低 1 至 6 分.

3. sig 的值为 0.0083,远小于 0.5,不能接受"油价均值相同"假设.

所以,可以认为 1、2 月份油价不同.

4. 非参数检验:总体分布的检验

MATLAB 工具箱提供了两个对总体分布进行检验的命令.

(1) h = normplot(x)

此命令显示数据矩阵 x 的正态概率图.如果数据来自于正态分布,则图形显示出直线形态.而其他概率分布函数显示出曲线形态.

(2) h = weibplot(x)

此命令显示数据矩阵 x 的 Weibull 概率图.如果数据来自于 Weibull 分布,则图形将显示出直线性形态.而其他概率分布函数将显示出曲线形态.

下面举一个综合的实例.

例 11 一道工序用自动化车床连续加工某种零件,由于刀具损坏等会出现故障.故障是完全随机的,并假定生产任一零件时出现故障机会均相同.工作人员是通过检查零件来确定工序是否出现故障的.现积累有 100 次故障纪录,故障出现时该刀具完成的零件数如下:

459	362	624	542	509	584	433	748	815	505
612	452	434	982	640	742	565	706	593	680
926	653	164	487	734	608	428	1 153	593	844
527	552	513	781	474	388	824	538	862	659
775	859	755	49	697	515	628	954	771	609
402	960	885	610	292	837	473	677	358	638
699	634	555	570	84	416	606	1 062	484	120
447	654	564	339	280	246	687	539	790	581
621	724	531	512	577	496	468	499	544	645
764	558	378	765	666	763	217	715	310	851

试观察该刀具出现故障时完成的零件数属于哪种分布.

解

1. 数据输入:

```
x1 = [459  362  624  542  509  584  433  748   815  505];
x2 = [612  452  434  982  640  742  565  706   593  680];
x3 = [926  653  164  487  734  608  428  1153  593  844];
x4 = [527  552  513  781  474  388  824  538   862  659];
x5 = [775  859  755  49   697  515  628  954   771  609];
x6 = [402  960  885  610  292  837  473  677   358  638];
x7 = [699  634  555  570  84   416  606  1062  484  120];
```

```
x8 =[447  654  564  339  280  246  687  539  790  581];
x9 =[621  724  531  512  577  496  468  499  544  645];
x10 =[764  558  378  765  666  763  217  715  310  851];
x =[x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8  x9  x10];
```

2. 作频数直方图

```
hist(x,10)
```

从图 15-6 可以看出，该刀具寿命近似服从正态分布.

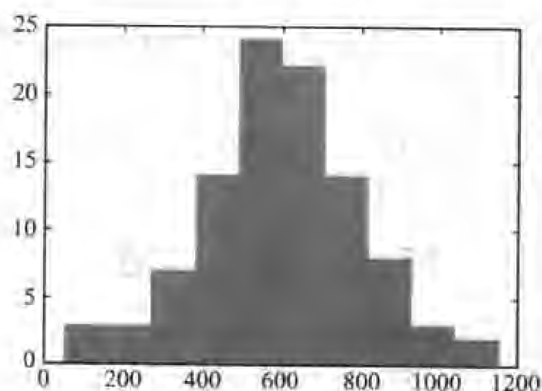


图 15-6 频数直方图

3. 分布的正态性检验

```
normplot(x)
```

从图 15-7 可以看出，数据基本分布在一条直线上，故初步可以断定刀具寿命为正态分布.

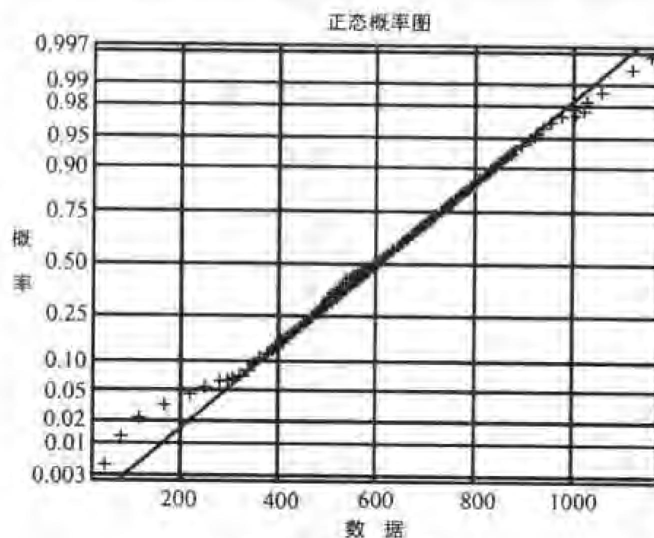


图 15-7 正态概率图

4. 参数估计：

在基本确定所给数据 x 的分布后，就可以估计该数据的参数.

```
[muhat,sigmahat,muci,sigmaci]=normfit(x)
```

结果：muhat = 594，sigmahat = 204.1301，muci = [553.496 2，634.503 8]，sigmaci = [179.227 6，237.132 9]

估计出该刀具的均值为 594，标准差为 204，均值的 0.95 置信区间为[553.4962，634.5038]，标准差的 0.95 置信区间为[179.2276，237.1329].

5. 假设检验：

已知刀具的寿命服从正态分布，现在方差未知的情况下，检验其均值 m 是否等于 594.

```
[h,sig,ci] = ttest(x,594)
```

结果：h = 0，sig = 1，ci = [553.4962，634.5038].

检验结果：1. 布尔变量 h = 0，表示不拒绝零假设.说明提出的假设寿命均值 594 是合理的.

2. 95% 的置信区间为[553.5，634.5]，它完全包括 594，且精度很高.

3. sig 的值为 1，远超过 0.5，不能拒绝零假设.

所以，可以认为刀具平均寿命为 594.

15.5 习　　题

1. 某校 60 名学生的一次考试成绩如下：

93	75	83	93	91	85	84	82	77	76	77	95	94	89	91
88	86	83	96	81	79	97	78	75	67	69	68	84	83	81
75	66	85	70	94	84	83	82	80	78	74	73	76	70	86
76	90	89	71	66	86	73	80	94	79	78	77	63	53	55

（1）计算均值、标准差、极差、偏度、峰度，画出直方图；

（2）检验分布的正态性；

（3）若检验符合正态分布，估计正态分布的参数并检验参数.

2. 科学上的重大发现往往是由年轻人作出的. 下面列出了自 16 世纪初期至 20 世纪早期的十二项重大发现及其发现者、发现年份和发现者当时年龄.

重大发现	发现者	发现年份	年龄
（1）地球绕太阳运转	哥白尼	1513	40
（2）望远镜、天文学的基本定理	伽利略	1600	36
（3）运动原理、重力、微积分	牛顿	1665	23
（4）电的本质	富兰克林	1746	40
（5）燃烧是与氧气联系着的	拉瓦锡	1774	31
（6）地球是渐进过程演化成的	莱尔	1830	33
（7）自然选择控制演化的证据	达尔文	1858	49
（8）光的场方程	麦克斯韦	1864	33
（9）放射性	居里	1898	31
（10）量子论	普朗克	1900	42
（11）狭义相对论	爱因斯坦	1905	26
（12）量子论的数学基础	薛定谔	1926	39

设样本来自正态总体，求发现者当时的平均年龄的置信水平为 95% 的单侧置信上限.

3. 设某产品的生产工艺发生了改变，在改变前后分别测得了若干产品的技术指标，其结果为

改变前： 21.6 22.8 22.1 21.2 20.5 21.9 21.4

改变后： 24.1 23.8 24.7 24.0 23.7 24.3 24.5

假设该产品的技术指标服从正态分布，方差未知且在工艺改变前后不变. 试估计工艺改变后，该技术指标的置信水平为 95% 的平均值的变化范围.

4. 正常人的脉搏平均为 72 次/秒，某医生测得 10 例慢性中毒者的脉搏为（单位：次/秒）：

54 67 65 68 78 70 66 70 69 67

设中毒者的脉搏服从正态分布，问中毒者和正常人的脉搏有无显著差异（$\alpha=0.05$）?

5. 从某电工器材厂生产的一批保险丝中抽取 10 根，测试其融化时间，得到数据如下：

42 65 75 78 71 59 57 68 55 54

设这批保险丝的融化时间服从正态分布，检验总体方差是否等于 12^2?

6. 甲、乙两台机床生产同一型号的滚珠，从这两台机床生产的滚珠中分别抽取若干个样品，测得滚珠的直径（单位：mm）如下：

甲机床：15.0 14.7 15.2 15.4 14.8 15.1 15.2 15.0

乙机床：15.2 15.0 14.8 15.2 15.0 15.0 14.8 15.1 14.9

设两台机床生产的滚珠的直径都服从正态分布，检验它们是否服从相同的正态分布（$\alpha=0.05$）?

7. 据说某地汽油的价格是每加仑①115 美分，为了验证这种说法，一位学者开车随机选择了一些加油站，得到某年 1 月和 2 月的数据如下：

1 月：119 117 115 116 112 121 115 122 116 118

109 112 119 112 117 113 114 109 109 118

2 月：118 119 115 122 118 121 120 122 128 116

120 123 121 119 117 119 128 126 118 125

（1）分别用两个月的数据验证这种说法的可靠性；

（2）分别给出 1 月和 2 月汽油价格的置信区间；

（3）给出 1 月和 2 月汽油价格差的置信区间.

① 1 加仑（美）$=3.785\ 412\ \mathrm{dm}^3$

第 16 章　回 归 分 析

一切运动着的事物都是相互联系、相互制约的，从而，描述事物和事物运动的变量之间也是相互联系、相互制约的. 变量之间的相互关系，可分为两类：一类叫做**确定性关系**，也叫做函数关系，其特征是：一个变量随着其他变量的确定而确定. 例如圆面积 S 与半径 r 之间的关系 $S=\pi r^2$. 另一类关系叫**相关关系**，这一类关系的特征是：变量之间的关系很难用一种精确的方法表示出来. 例如，人的身高和体重之间有一定的关系，但是由身高不能精确地计算出体重，由体重也不能精确地计算出身高；又如人的年龄与血压之间的关系；农业上的施肥量与亩产量之间的关系等. 不过，需要指出的是：确定性关系与相关性关系之间没有一道不可逾越的鸿沟. 由于存在测量误差等原因，确定性关系在实际问题中往往通过相关关系表示出来. 另一方面，当对事物内部规律了解得更加深刻时，相关关系也有可能转化为确定性关系.

回归分析就是处理变量之间的相关关系的一种数学方法，它是最常用的数理统计方法，能解决预测、控制、生产工艺优化等问题. 它在工农业生产和科学研究各个领域中均有广泛应用.

回归分析一般分为线性回归分析与非线性回归分析. 本章着重介绍线性回归分析，它是两类回归分析中较简单的一类，也是应用得较多的一类.

16.1　一元线性回归

16.1.1　数学模型

先看一个实际例子：

例 1　测 16 名成年女子的身高与腿长所得数据如下：

身高（cm）	143	145	146	147	149	150	153	154	155	156	157	158	159	160	162	164
腿长（cm）	88	85	88	91	92	93	93	95	96	98	97	96	98	99	100	102

为了研究这些数据之间的规律性，我们以身高 x 为横坐标，以腿长 y 为纵坐标将这些数据点 (x_i, y_i) 在平面直角坐标系上标出，如图 16－1 所示. 称这个图为散点图.

由图 16－1 看到，数据点大致落在一条直线附近，这说明变量 x 与 y 之间的关系大致可以看作是直线关系. 不过这些点又不都在一条直线上，这表明 x 和 y 之间的关系不是确定性关系. 实际上，腿长 y 除了与身高 x 有一定关系外，还受到许多其他因素的影响. 因此 y 与 x 之间可假定有如下结构式：

$$y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon \tag{1}$$

其中 β_0、β_1 是两个未知参数，ε 为其他随机因素对 y 的影响. x 是非随机可精确观察的，ε 是均值为零的随机变量，是不可观察的.

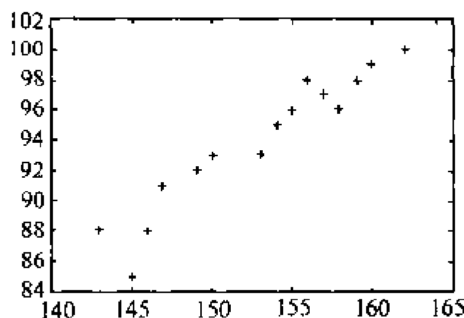


图 16-1

一般地,称由(1)确定的模型为**一元线性回归模型**,记为

$$\begin{cases} y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \\ E\varepsilon = 0, D\varepsilon = \sigma^2 \end{cases} \tag{2}$$

固定的未知参数 β_0、β_1 称为**回归系数**,自变量 x 称为**回归变量**.

(1)式两边同时取期望得:$Y = \beta_0 + \beta_1 x$,称为 **y 对 x 的回归直线方程**.

在该模型下,第 i 个观测值可以看作样本 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$(这些样本相互独立但不同分布,$i = 1, 2, \cdots, n$)的实际抽样值,即样本值.

一元线性回归分析的主要任务是:用试验值(样本值)对 β_0、β_1 和 σ 作点估计;对回归系数 β_0、β_1 作假设检验;在 $x = x_0$ 处对 y 作预测,并对 y 作区间估计.

16.1.2 模型参数估计

1. 回归系数的最小二乘估计

现在我们用最小二乘法来估计模型中的未知参数 β_0 和 β_1. 假设有 n 组独立观测值:$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$(例1中的 $n = 16$),则由(2)有

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n \\ E\varepsilon_i = 0, D\varepsilon_i = \sigma^2 \text{ 且 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \text{ 相互独立} \end{cases}$$

记

$$Q = Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

称 $Q(\beta_0, \beta_1)$ 为偏离真实直线的偏差平方和. 最小二乘法就是选择 β_0 和 β_1 的估计 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$,使得

$$Q(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \min_{\beta_0, \beta_1} Q(\beta_0, \beta_1)$$

为此,将上式分别对 β_0、β_1 求偏导数,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \end{cases}$$

令上两式为0,并用 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 取代 β_0, β_1,得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

此方程组称为**正规方程**.

由正规方程解得

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \end{cases}$$

或

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

用这种方法求出的估计 $\hat{\beta}_i (i=0,1)$ 称为 β_i 的**最小二乘估计**,简称 **LS 估计**.(经验)回归方程为

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x - \bar{x})$$

显然,$\hat{\beta}_1$ 是拟合直线的斜率,$\hat{\beta}_0$ 是拟合直线在 $x = x_0$ 处的截距. n 个点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的几何重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 落在拟合直线上.

为了便于计算,人们常用下列记号和等式的各种变形:

$$\begin{cases} L_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \\ L_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\bar{y} \\ L_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 \end{cases} \tag{3}$$

这时 $\hat{\beta}_1$ 可简记为

$$\hat{\beta}_1 = L_{xy}/L_{xx}$$

注意:(1) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \sim N\left(\beta_1, \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$,所以它是 β_1 的无偏估计,同样,$\hat{\beta}_0$ 也

是 β_0 的无偏估计.

(2) 对每组(x_i,y_i),可求出拟合值 $\hat{y}_i$ 以及残差 $y_i-\hat{y}_i$,易知

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=0$$

这说明残差之和为零.

2. σ^2 的无偏估计

记

$$Q_e=Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \tag{4}$$

称 Q_e 为**残差平方和**或**剩余平方和**. 在模型(2)下,易知,$EQ_e=(n-2)\sigma^2$,常记

$$\hat{\sigma}_e^2=Q_e/(n-2)$$

称 $\hat{\sigma}_e^2$ 为**剩余方差(残差的方差)**,它是 σ^2 的无偏估计,且

$$\frac{1}{\sigma^2}Q_e\sim\chi^2(n-2),\quad \frac{(n-2)}{\sigma^2}\hat{\sigma}_e^2\sim\chi^2(n-2)$$

$\hat{\sigma}_e^2$ 分别与 $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$ 独立,$\hat{\sigma}_e$ 称为**剩余标准差**. 显然,$\hat{\sigma}_e$ 越接近于 0,说明线性回归方程(1)越显著.

16.1.3 检验、预测与控制

一元线性回归模型的检验、预测、控制是回归分析的主要内容. 先不加证明地给出:

定理 在模型(2)下,我们有

(1) $\hat{\beta}_0\sim N\left(\beta_0,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}\right)\right)$;

(2) $\hat{\beta}_1\sim N\left(\beta_1,\frac{\sigma^2}{L_{xx}}\right)$;

(3) $\frac{Q_e}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-2)$;

(4) $\bar{y},\hat{\beta}_1,Q_e$ 相互独立.

1. 回归方程的显著性检验

在实际工作中,事先我们并不能断定 y 与 x 之间有线性关系,式(1)只是一种假设. 当然,这个假设不是没有根据,我们可以通过专业知识和散点图作粗略判断. 但在求出回归方程之后,还须对这种线性回归方程同实际观测数据拟合的效果进行检验.

由式(1)可知,当$|\beta_1|$越大,y 随 x 的变化的趋势就越明显;反之,当$|\beta_1|$越小,y 随 x 的变化的趋势就越不明显,特别当 β_1 等于 0 时,则认为 y 与 x 之间不存在线性关系. 当 $\beta_1\neq0$ 时,则认为 y 与 x 之间有线性关系(1). 因此,问题归结为对假设

$$H_0:\beta_1=0;\quad H_1:\beta_1\neq0$$

进行检验. 假设 H_0: $\beta_1=0$ 被拒绝,则回归显著,认为 y 与 x 存在线性关系,所求的线性回归方程有意义;否则回归不显著,y 与 x 的关系不能用一元线性回归模型来描述,所得的回归方程也无意义. 此时,可能有如下几种情况:

(1) x 对 y 没有显著影响,此时应丢掉预报变量 x.

(2) x 对 y 有显著影响,但这种影响不能用线性相关关系来表示,应该用非线性回归.

(3) 除 x 之外,还有其他不可忽略的预报变量对 y 有显著影响,从而削弱了 x 对 y 的影响.此时应用多元线性回归模型.因此,在接受 H_0 的同时,需要进一步查明原因分别处理.但要查明原因,并非易事,此时对该问题的专业知识往往起着重要的作用.

以下介绍三种不同的检验方法,它们本质上是相同的.

(Ⅰ) F 检验法

考虑恒等式

$$L_{yy} = Q_e + U \tag{5}$$

其中总离差平方和 L_{yy}、残差平方和 Q_e 的表达式分别见(3)、(4)式,$U = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 称为回归平方和,(5)式称为(总离差)平方和分解式.

(5)式表示总的离差平方和 L_{yy} 分解为两部分:前一部分是由于实际观测值没有落在回归直线上引起的(否则残差平方和为0),后一部分则是由回归直线引起的.因此,U 越大,Q_e 就越小,表示 y 与 x 的线性关系就越显著;反之,U 越小,Q_e 就越大,表示 y 与 x 的线性关系就越不显著.这样,我们找到了一种判别回归直线拟合程度好坏的方法:看总的离差平方和 L_{yy} 包含了多少回归平方和与多少残差平方和.如果 U/L_{yy} 接近于1,或等价地,U/Q_e 较大,则对拟合效果感到满意.

易知,当 H_0 成立时,有 $U/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$ 且 Q_e 与 U 独立.再由 F 分布的定义知,当 H_0 成立时,有

$$F = \frac{U}{Q_e/(n-2)} \sim F(1, n-2) \tag{6}$$

前面分析过,当 H_0 不真时,线性回归效果显著,F 的值应比较大;否则就比较小.由此,对给定的显著水平 α,检验规则为:

当 $F > F_{1-\alpha}(1, n-2)$ 时,拒绝 H_0;否则就接受 H_0.

(Ⅱ) t 检验法

由 t 分布的定义知:当 H_0 成立时,

$$T = \frac{\sqrt{L_{xx}}\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_e} \sim t(n-2)$$

因此,对于给定的显著水平 α,用 T 统计量检验 H_0,其规则为:当 $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ 时,拒绝 H_0;否则就接受 H_0.

(Ⅲ) r 检验法

我们已经提到过,如果 $\frac{U}{L_{yy}}$ 接近于1,则回归方程效果显著.记

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{U}{L_{yy}}} \tag{7}$$

称为**样本相关系数**,简称**相关系数**.故统计量 r 可用来刻画 y 与 x 之间线性相关的密切程度,也可用来检验假设 H_0: $\beta_1 = 0$,其检验方法称为 **r 检验法**.对给定的显著水平 α,检验规则为:

当$|r| > r_{1-\alpha}$时,拒绝H_0;否则就接受H_0. 这里$r_{1-\alpha}$满足

$$P(|r| \geq r_{1-\alpha}) = \alpha, \text{其中 } r_{1-\alpha} = \sqrt{\frac{1}{1 + (n-2)/F_{1-\alpha}(1, n-2)}}$$

也可从附表查得$r_{1-\alpha}$的值. 由于

$$F = \frac{(n-2)U}{Q_e} = \frac{(n-2)r^2 L_{yy}}{L_{yy}(1-r^2)} = \frac{(n-2)r^2}{(1-r^2)}$$

所以r检验法与F检验法实际上是一回事.

2. 回归系数的置信区间

由

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}}} \sim t(n-2), \quad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_e / \sqrt{L_{xx}}} \sim t(n-2)$$

得β_0和β_1置信水平为$1-\alpha$的置信区间分别为

$$\left[\hat{\beta}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}}, \quad \hat{\beta}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}}\right]$$

和

$$[\hat{\beta}_1 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}_e / \sqrt{L_{xx}}, \quad \hat{\beta}_1 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}_e / \sqrt{L_{xx}}]$$

再由$Q_e/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$,还可得$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\frac{Q_e}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)}, \quad \frac{Q_e}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)}\right]$$

3. 预测与控制

若检验的结果拒绝了H_0: $\beta_1 = 0$,则表明y与x的线性相关关系显著,也就是回归方程与实际观测数据拟合效果显著. 接下来的问题是如何利用回归方程$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$进行**预测**和**控制**. 所谓预测问题,就是对固定的x值预测相应的y值;所谓控制问题是指通过控制x的值,以便把y的值控制在指定的范围内.

(1) 预测

设y与x满足线性模型,且$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. 根据历史样本$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$求得回归方程$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$,令$x_0$表示$x$的某个固定值,且$y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0, \varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2)$. 设$y_0, y_1, \cdots, y_n$相互独立,求$y_0$的预测值和预测区间.

根据回归方程的意义,我们自然用y_0的回归值$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$作为$y_0$的预测值. 因

$$E\hat{y}_0 = E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0 = Ey_0$$

故$\hat{y}_0$是Ey_0的无偏估计.

往下讨论y_0的区间预测问题. 为此,先求$y_0 - \hat{y}_0$的分布.

由于$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{x})$,$\bar{y}$与$\hat{\beta}_1$相互独立,且

$$D(\hat{y}_0) = D(\bar{y}) + (x_0 - \bar{x})^2, \quad D(\hat{\beta}_1) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}\right]$$

故

$$\hat{y}_0 \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_0, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}\right]\right)$$

又因 $\hat{y}_0$ 只依赖于 $y_0, y_1, \cdots, y_n, y_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, \sigma^2)$，由此得 $\hat{y}_0$ 与 y_0 相互独立，所以 $y_0 - \hat{y}_0$ 服从正态分布，其方差为

$$D(y_0 - \hat{y}_0) = Dy_0 + D\hat{y}_0 = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}\right]$$

从而得 $y_0 - \hat{y}_0 \sim N\left(0, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}\right]\right)$.

由 $\bar{y}, \hat{\beta}_1, Q_e$ 相互独立. 可得 $\hat{y}_0$ 与 Q_e 独立，再由 y_0 与 Q_e 独立，推得 $y_0 - \hat{y}_0$ 与 Q_e 独立. 因此

$$T = \frac{y_0 - \hat{y}_0}{\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}}} \Bigg/ \sqrt{\frac{Q_e}{\sigma^2(n-2)}}$$

$$= \frac{y_0 - \hat{y}_0}{\hat{\sigma}_e\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}}} \sim t(n-2)$$

给定显著性水平 α，有 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，使

$$P\{|T| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\} = 1 - \alpha$$

即有

$$P\{\hat{y}_0 - \delta(x_0) < y_0 < \hat{y}_0 + \delta(x_0)\} = 1 - \alpha$$

其中

$$\delta(x_0) = \hat{\sigma}_e t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}}$$

从而得到 y_0 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间为

$$[\hat{y}_0 - \delta(x_0),\quad \hat{y}_0 + \delta(x_0)]$$

由上可知，剩余标准差 $\hat{\sigma}_e$ 越小，预测区间越窄，即预测越精确. 另外，对于给定的样本观测值和置信水平而言，x_0 越靠近 $\bar{x}$ 时，预测精度就越高.

由于 x_0 的任意性，因此夹在两曲线

$$\hat{y}_1(x) = \hat{y}_0 - \delta(x_0),\quad \hat{y}_2(x) = \hat{y}_0 + \delta(x_0)$$

之间的部分就是 $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测带.

特别地，当 n 很大且 x 在 $\bar{x}$ 附近取值时，有

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \approx u_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}} \approx 1$$

此时，$\delta(x) \approx \hat{\sigma}_e u_{1-\frac{\alpha}{2}}$，于是 y 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间近似为

$$\left[\hat{y} - \hat{\sigma}_e u_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \hat{y} + \hat{\sigma}_e u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

此时的预测带是平行于回归直线的两平行线之间的部分. 作这种近似使得预测工作得到很大简化. 特别在应用中，有时更简单地取

$$\alpha = 0.05, \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$$

$$\alpha = 0.01, \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.995} = 2.58$$

这就是说,置信水平为95%与99%的预测区间分别近似为

$$[\hat{y} - 1.96\hat{\sigma}_e, \quad \hat{y} + 1.96\hat{\sigma}_e]$$

和

$$[\hat{y} - 2.58\hat{\sigma}_e, \quad \hat{y} + 2.58\hat{\sigma}_e]$$

(2) 控制

若要 $y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$ 的值以 $1-\alpha$ 的概率落在指定区间 (y',y'') 之内,那么预报变量 x 应控制在什么范围内. 也就是说,要求出区间 (x',x''),使当 $x'<x<x''$ 时,对应 y 值以 $1-\alpha$ 的概率落在 (y',y'') 之内,这就是控制问题. 控制问题可以看作是预测问题的反问题.

在图中,由于两曲线 $\hat{y}_1(x)=\hat{y}_0-\delta(x_0)$,$\hat{y}_2(x)=\hat{y}_0+\delta(x_0)$ 所夹的部分就是 $y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测带,故若要 y 的观测值以 $1-\alpha$ 的概率落在 (y',y'') 之内,只要控制 x 满足以下两个不等式

$$\hat{y} - \delta(x) \geqslant y', \quad \hat{y} + \delta(x) \leqslant y''$$

这里要求 $y''-y'\geqslant 2\delta(x)$. 若 $\hat{y}-\delta(x)=y'$,$\hat{y}-\delta(x)=y''$ 分别有解 x' 和 x'',即

$$\hat{y} - \delta(x') = y', \quad \hat{y} + \delta(x'') = y''$$

则 (x',x'') 就是所求的 x 的控制区间.

一般来说,要解出 x' 和 x'' 很复杂. 若样本容量很大,且 x 在 $\bar{x}$ 附近时,问题可以大大简化,这时我们可以利用预测区间 $[\hat{y}-\hat{\sigma}_e u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \hat{y}+\hat{\sigma}_e u_{1-\frac{\alpha}{2}}]$ 来进行控制.

16.1.4 可线性化的一元非线性回归(曲线回归)

在工程技术中,有时两个变量之间的关系可以不是直线(或线性)的相关关系,而是某种曲线(或非线性)的相关关系.

例 2 出钢时所用的盛钢水的钢包,由于钢水对耐火材料的侵蚀,容积不断增大. 我们希望知道使用次数与增大的容积之间的关系. 对一钢包做试验,测得的数据列于下表:

使用次数	增大容积	使用次数	增大容积
2	6.42	10	10.49
3	8.20	11	10.59
4	9.58	12	10.60
5	9.50	13	10.80
6	9.70	14	10.60
7	10.00	15	10.90
8	9.93	16	10.76
9	9.99		

把 (x_i,y_i),$i=1,2,\cdots,15$ 画出散点图,这些点分布在一条曲线附近. 从图 16-2 上我们看到,开始侵蚀速度快,然后逐渐减慢,而点的分布逐渐接近于一条平行于 x 轴的直线,因此钢包容积不

会无限增加.显然将此例看作一元线性回归是不合适的.这种需要配曲线的情况就是**非线性回归或曲线回归**.此例中应该怎样配曲线呢?

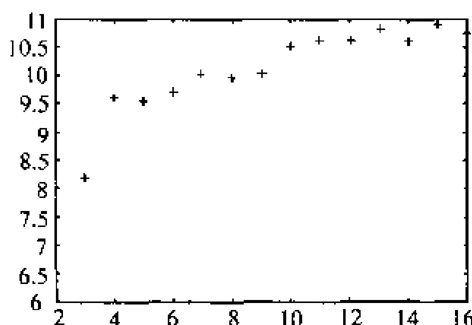


图 16-2

配曲线的一般方法是:先对两个变量 x 和 y 作 n 次试验观察得 (x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$.画出散点图,根据散点图确定须配曲线的类型.然后由 n 对试验数据确定每一类曲线的未知参数 a 和 b.采用的方法是通过变量代换把非线性回归化成线性回归,即采用非线性回归线性化的方法.通常选择的六类曲线及具体代换方法如下:

(1) 双曲线 $\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x}$.作变量代换 $u=1/x$, $v=1/y$,得

$$v = a + bu$$

由试验值 (x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$ 按 $u_i=1/x_i$, $v_i=1/y_i$ 算出 (u_i,v_i), $i=1,2,\cdots,n$,对 u 与 v 利用前面的经验回归直线公式,计算参数估计值 $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$.故有

$$\frac{1}{y} = \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{x}$$

(2) 幂函数曲线 $y=ax^b$,其中 $x>0$, $a>0$.

两边取常用对数:$\log y=\log a+b\log x$,再作代换 $u=\log x$, $v=\log y$, $A=\log a$,则幂函数曲线方程就变成直线方程

$$v = A + bu$$

由试验值 (x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$ 算出 (u_i,v_i), $i=1,2,\cdots,n$,对 u 与 v 利用本章前面的经验回归直线公式,计算参数估计值 $\hat{A}$、$\hat{b}$,又由 $\hat{a}=10^{\hat{A}}$ 得 $\hat{a}$ 值.故有

$$y = \hat{a}x^{\hat{b}}$$

(3) 指数曲线 $y=ae^{bx}$,其中参数 $a>0$.

(4) 倒指数曲线 $y=ae^{b/x}$,其中 $a>0$.两边取自然对数,得 $\ln y=\ln a+\frac{b}{x}$,再作代换 $u=\frac{1}{x}$, $v=\ln y$, $A=\ln a$ 则倒指数曲线方程变成

$$v = A + bu$$

由试验值 (x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$ 算出 (u_i,v_i), $i=1,2,\cdots,n$,对 u 与 v 利用 14.1.2 的方法配经验回归直线公式,计算参数估计值 $\hat{A}$、$\hat{b}$,又由 $\hat{a}=e^{\hat{A}}$ 得 $\hat{a}$ 值.故有

$$y = \hat{a}x^{\hat{b}/x}$$

(5) 对数曲线 $y=a+b\log x, x>0$.

(6) S 型曲线 $y=\frac{1}{a+be^{-x}}$.

关于指数曲线、对数曲线和 S 型曲线的线性化方法希望读者自己去作.

现在来求解例 2. 由图我们选配倒指数曲线

$$y = ae^{b/x}$$

根据线性化方法,算得

$$\hat{b} = -1.1107, \quad \hat{A} = 2.4587$$

由此

$$\hat{a} = e^{\hat{A}} = 11.6789$$

最后得

$$y = 11.6789e^{-\frac{1.1107}{x}}$$

这就是要配得的曲线方程.

应该指出,上面选取的曲线类型是根据试验值的点图确定的. 在工程技术中,有时利用专业知识也可以确定曲线的类型,这当然更好.

16.2 多元线性回归

16.2.1 数学模型

本节介绍有多个自变量的多元线性回归,这种回归在工程上应用更为广泛.

一般地,影响试验指标的因素往往不止一个,即有多个因素,假设它们之间有如下的线性关系式:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon \tag{1}$$

其中 y 为可观察的随机变量,称为因变量. $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为非随机的可精确观察的变量,称为自变量或因子,$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 为 $k+1$ 个未知参数,ε 是随机变量,一般假设 $E\varepsilon=0, D\varepsilon=\sigma^2>0$. 为了估计未知参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 及 σ^2,我们对 y 与 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 同时作 n 次观察(试验)得 n 组观察值 $(y_t, x_{t1}, \cdots, x_{tk}), t=1, \cdots, n (n>k+1)$,它们满足关系式

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \cdots, n \tag{2}$$

其中 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 互不相关且均是与 ε 同分布的随机变量. 为了用矩阵表示上式,令

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

于是(1)式变为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为已知的 $n\times(k+1)$ 阶矩阵,称为回归**设计矩阵**或**资料矩阵**. $\boldsymbol{\beta}$ 为 $k+1$ 维未知的列向量, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是满足

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \\ \mathrm{COV}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n \end{cases}$$

的 n 维随机列向量,其中 σ^2 是未知参数, $D(\varepsilon_t)=\sigma^2, t=1,\cdots,n, \boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵,即对随机误差 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 作无偏、等方差与互不相关的假定. $\boldsymbol{Y}$ 是 n 维观察列向量. 一般称

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \mathrm{COV}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n \end{cases} \tag{4}$$

为高斯－马尔可夫线性模型(k 元线性回归模型),并简记为$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X\beta},\sigma^2\boldsymbol{I}_n)$.

对(1)式取期望

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

称为**回归平面方程**.

对线性模型$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X\beta},\sigma^2\boldsymbol{I}_n)$所要考虑的主要问题是:

(1) 用试验值(样本值)对未知参数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 和 σ^2 作点估计和假设检验,从而建立 y 与 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 之间的数量关系;

(2) 在 $x_1=x_{01},x_2=x_{02},\cdots,x_k=x_{0k}$ 处对 y 的值作预测与控制,并对 y 作区间估计. 本章总假设 $n>k+1$.

16.2.2 模型参数估计

1. 对 $\boldsymbol{\beta}_i$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 作估计

下面用最小二乘法求 $\beta_0,\cdots,\beta_k$ 的估计量. 作离差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \boldsymbol{\beta}_0 - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_k x_{ik})^2$$

选择 $\boldsymbol{\beta}_0,\cdots,\beta_k$,使 Q 达到最小,即 $Q=\min$. 根据微积分学中求最小值的方法,只需求方程组(该方程组称为正规方程组)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_0} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_k} = 0 \end{cases}$$

的解. 解此方程组得到的不是 $\beta_0,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的真值,而是估计值 $\hat\beta_0,\cdots,\hat\beta_k$,故可将此正规方程组化简为

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{B} \quad 或 \quad (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat\beta_0 \\ \hat\beta_1 \\ \vdots \\ \hat\beta_k \end{bmatrix} \tag{5}$$

解得估计值

$$\hat{\beta} = A^{-1}B = (X^TX)^{-1}(X^TY)$$（若 $A = X^TX$ 可逆，$B = X^TY$，X^T 表示 X 的转置矩阵）

这样计算得到的 $\hat{\beta}_i$ 代入回归平面方程，得

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1x_1 + \cdots + \hat{\beta}_kx_k$$

称为**经验回归平面方程**. $\hat{\beta}_i$ 称为**经验回归系数**.

注意：$\hat{\beta}$ 服从 $p+1$ 维正态分布，且为 β 的无偏估计，协方差阵为 σ^2C，其中 $C=(X^TX)^{-1}$.

2. 多项式回归

设变量 x、y 的回归模型为

$$y = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \cdots + \beta_kx^k + \varepsilon$$

其中 $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 是未知参数，ε 服从正态分布 $N(0,\mu^2)$. 因而

$$Ey = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \cdots + \beta_kx^k$$

是 k 次多项式. 上面的回归模型称为**多项式回归**. 多项式回归是一元非线性回归的一种特殊情况. 它可以通过变量代换线性化. 令 $x_i = x^i, i=1,2,\cdots,k$，多项式回归模型变为多元线性回归模型. 所以对多项式同归的未知参数估计可利用多元线性回归的参数估计算法. 当$p=2$时，为抛物线回归.

16.2.3 多元线性回归中的检检与预测

1. 线性模型和回归系数的检验

现在我们来考虑如下的模型检验问题：

$$\begin{cases} Y = X\beta + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N_n(0,\sigma^2 I_n) \end{cases}$$

在实际问题中，事先我们并不知道或者不能断定随机变量 y 与一组变量 $x_1,\cdots,x_k$ 之间确有线性关系. $y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_kx_k+\varepsilon$ 往往只是一种假设，因此在求出线性回归方程之后，还须对求出的线性回归方程同实际观测数据拟合效果进行检验. 可提出以下原假设

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$$

（Ⅰ）F 检验法

由前面知识知，当 H_0 成立时，有

$$F = \frac{U/k}{Q_e/(n-k-1)} \sim F(k,n-k-1) \tag{6}$$

当显著水平 α 给定后，由 $\alpha = P\{F > F_{1-\alpha}(k,n-k-1) \mid H_0 \text{ 成立}\}$，即

$$1-\alpha = P\{F \leqslant F_{1-\alpha}(k,n-k-1) \mid H_0 \text{ 成立}\}$$

知检验规则为：

如果 $F > F_{1-\alpha}(k,n-k-1)$，则拒绝 H_0，认为 y 与 $x_1,\cdots,x_k$ 之间显著地有线性关系；否则就接受 H_0，认为 y 与 $x_1,\cdots,x_k$ 之间线性关系不显著.

（Ⅱ）r 检验法

与一元回归情形类似，y 与 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性相关的密切程度也可用回归平方和 U 在总平方和 L_{yy}中所占的比例大小来衡量. 定义

$$R = \sqrt{\frac{U}{L_{yy}}} = \sqrt{\frac{U}{U + Q_e}} \tag{7}$$

为 y 与 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的**多元相关系数或复相关系数**. 容易证明 F 与 R 有如下关系：

$$F = \frac{n-k-1}{k} \frac{R^2}{1-R^2}$$

故用 F 和用 R 检验是等效的.

2. 预测

(1) 点预测

当我们求出回归方程

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$$

并经过检验之后，对于给定自变量的值 $x_1^*, \cdots, x_k^*$，我们自然会用 $\hat{y}^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1^* + \cdots + \hat{\beta}_k x_k^*$ 来预测 $y^* = \beta_0 + \beta_1 x_1^* + \cdots + \beta_k x_k^* + \varepsilon$. 称 $\hat{y}^*$ 为 y^* 的**点预测**. 因 $E(\hat{y}^* - y^*) = 0$，所以，实际上 $\hat{y}^*$ 是 Ey^* 的无偏估计量.

(2) 区间预测

对于正态线性模型，由于 $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{k+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{C})$，其中 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1} = [c_{ij}]$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，记 $\boldsymbol{G} = [1, x_1, \cdots, x_k]$，则有

$$\begin{aligned}\hat{y} = \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{\beta}} &\sim N_1(\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{G}\sigma^2\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}) \\ &= N\Big(\sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{\beta}_i x_i, \sigma^2 \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij} x_i x_j\Big),\end{aligned}$$

$$x_0 \equiv 1$$

当 $\boldsymbol{G}$ 为已知时，我们来求 y 的预测区间. 易知，Q_e 与 $\hat{\beta}$ 相互独立，从而 Q_e 与 $\hat{y} = G\hat{\beta}$ 相互独立. 又因 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 相互独立，所以 y 与 $\hat{y} = G\hat{\beta}$ 独立，y 与 Q_e 也独立. 从而 $y - \hat{y}$ 与 Q_e 也独立，且

$$y - \hat{y} \sim N\Big(0, \sigma^2\big(1 + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij} x_i x_j\big)\Big)$$

通常有 $|y - \hat{y}| \leqslant K$，即 y 的置信区间为 $(\hat{y} - K, \hat{y} + K)$，$K$ 由置信度 $1-\alpha$ 确定，当 $1-\alpha$ 给定后，因为

$$\frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1)$$

所以

$$\begin{aligned}T &= \frac{y - \hat{y}}{\sigma\sqrt{1 + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij} x_i x_j}} \Bigg/ \sqrt{\frac{Q_e}{\sigma^2(n-k-1)}} \\ &= \frac{y - \hat{y}}{\hat{\sigma}_e\sqrt{1 + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij} x_i x_j}} \sim t(n-k-1)\end{aligned}$$

其中 $\hat{\sigma}_e = \sqrt{\dfrac{Q_e}{n-k-1}}$，因此

$$1-\alpha = P\left\{ |T| < \frac{K}{\hat{\sigma}_e \sqrt{1+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij}x_i x_j}} \right\}$$

从而

$$K = \hat{\sigma}_e t_{1-\alpha/2}(n-k-1)\sqrt{1+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij}x_i x_j}$$

故 y 的 $1-\alpha$ 的预测区间(置信)区间为$(\hat{y}_1,\hat{y}_2)$,其中

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \hat{y} - \hat{\sigma}_e t_{1-\alpha/2}(n-k-1)\sqrt{1+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij}x_i x_j} \\ \hat{y}_2 = \hat{y} + \hat{\sigma}_e t_{1-\alpha/2}(n-k-1)\sqrt{1+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} c_{ij}x_i x_j} \end{cases}$$

当 $k=1$ 时,对应一元线性回归模型,请读者自己据上式推导,并与前而结论作比较.

16.2.4 逐步回归分析

在实际研究中,影响因变量 y 的因素很多,而这些因素之间可能存在多重共线性,特别是在各个解释变量之间有高度的相互依赖性,如温度和雨量、雨量和雨日之间的关系密切,这就给系数的估计带来不合理的解释. 为得到一个可靠的回归模型,需要一种方法能有效地从众多影响 y 的因素中挑选出对 y 贡献大的变量,在它们和 y 的观测数据基础上建立"最优"的回归方程. **逐步回归分析法**就是一种自动地从大量可供选择的变量中选择那些对建立回归方程比较重要的变量的方法,它是在多元线性回归基础上派生出来的一种算法技巧.

从多元线性回归分析中我们知道,如果采用的自变量越多,则回归平方和越大,残差平方和越小. 然而,采用较多的变量来拟合回归方程,得到方程的稳定性差,每个自变量的区间误差积累将影响总体误差,用这样建立起来的回归方程作预测的可靠性差、精度低. 另一方面,如果采用了对 y 影响甚小的变量而遗漏了重要变量,可导致估计量产生偏倚和不一致性. 鉴于上述原因,我们希望得到"最优"的回归方程. 这样的"最优"的回归方程就是包含所有对 y 有影响的变量而不包含对 y 影响不显著的变量回归方程.

选择"最优"的回归方程有以下几种方法:

(1) 从所有可能的因子(变量)组合的回归方程中选择最优者;

(2) 从包含全部变量的回归方程中逐次剔除不显著因子;

(3) 从一个变量开始,把变量逐个引入方程;

(4) "有进有出"的逐步回归分析.

上而几种方法以第四种方法,即逐步回归分析法在筛选变量方而较为理想,故目前较多采用该方法来组建回归模型. 该方法也是从一个自变量开始,视自变量 y 作用的显著程度,从大到小地依次逐个引入回归方程. 但当引入的自变量由于后面变量的引入而变得不显著时,要将其剔除掉. 引入一个自变量或从回归方程中剔除一个自变量,为逐步回归的一步. 对于每一步都要进行 y 值检验,以确保每次引入新的显著性变量前回归方程中只包含对 y 作用显著的变量. 这个过程反复进行,直至既无不显著的变量从回归方程中剔除,又无显著变量可引入回归方程时为止.

引入自变量必须要有依据. 假定已有 k 个自变量引入回归方程,即已知回归方程:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

相应的平方和分解式为

$$S_{总} = U + Q_e$$

式中 $S_{总}$ 为总的平方和,U 为回归平方和,Q_e 为剩余离差平方和. 为表明 U 和 Q_e 与引入的自变量有关,分别用 $U(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 及 $Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 表示. 增加一个自变量 $x_i(i=k+1,k+2,\cdots,k+p)$ 后,就有了新的回归方程及其相应的平方和分解:

$$S_{总} = U(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i) + Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i)$$

原来是

$$S_{总} = U(x_1,x_2,\cdots,x_k) + Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

注意上式两端 $S_{总}$ 是一样的. 当 x_i 引入后,回归平方和从 $U(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 增加到 $U(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i)$,而残差平方和从 $Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 减少到 $Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i)$,并有

$$\begin{aligned}&U(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i) - U(x_1,x_2,\cdots,x_k)\\ &= Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k) - Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i)\\ &= V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)\end{aligned}$$

于是在添加 x_i 之后,x_i 对回归平方和的贡献 $V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,是由于引入 x_i 之后带来的关于因变量 y 的"信息",也就是 x_i 引入后在残差平方和中所减少的量,我们称其为对 y 的**方差贡献**. 因此,很自然地将这个量 $V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 与剩余平方和作比较,看看 x_i 的影响是否显著,因而用

$$F_{1i} = V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)/[Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_i)/(n-k-2)]$$

来进行检验,其中 n 是样本容量,k 是"已引入"的自变量个数. 适当选取引入自变量的 F 检验临界值 $F_{引}$,当 $F_{1i} > F_{引}$ 时,表明引入自变量是有意义的;当 $F_{1i} \leqslant F_{引}$ 时,引入自变量 x_i 就没有意义. 实际上,可能 $F_{1i} > F_{引}$ 的有好几个,当然选取最大的. 因此,在算法上应先求

$$\max_{1<i<p} F_{1i} = F_{ki}$$

然后将它与 $F_{引}$ 比较,如果 $F_{ki} > F_{引}$,相应的 x_i 入选;如果 $F_{ki} \leqslant F_{引}$,引入的步骤就到此为止(因为"贡献"最大都没有条件入选,其余的就更不用说了).

剔除自变量也必须有依据. 假定已有 k 个自变量引入回归方程,设为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,相应的平方和分解公式是

$$S_{总} = U(x_1,x_2,\cdots,x_k) + Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

逐个去掉自变量 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$ 后相应的平方和分解式:

$$S_{总} = U(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k) + Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k)$$

此时,回归平方和从 $U(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 降到 $U(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k)$,而残差平方和从 $Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 增加到 $Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k)$,相应 x_i 的"贡献"是

$$\begin{aligned}V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k) &= U(x_1,x_2,\cdots,x_k) - U(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k)\\ &= Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k) - Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_k)\end{aligned}$$

完全和上面引入变量道理一样,计算

$$F_{2i} = V_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)/[Q_e(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_k)/(n-k-2)]$$

来进行检验,其中 n 是样本容量,k 是已引入的自变量个数. 适当选取剔除一个自变量的 F 检验

临界值 $F_{剔}$，当 $F_{2i} \leqslant F_{剔}$ 时，表明已引入的自变量 x_i 对因变量 Y 的作用已不再显著，应当剔除；当 $F_{2i} > F_{剔}$ 时，表明此时无可剔除的自变量. 实际上，可能 $F_{2i} \leqslant F_{剔}$ 的有好几个，当然应该选最小的. 因此，在算法上应先求

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant k} F_{2i} = F_{ki}$$

然后将它与 $F_{剔}$ 比较. 如果 $F_{ki} \leqslant F_{剔}$，相应的 x_i 应剔除；如果 $F_{ki} > F_{剔}$，表明此时没有可剔除的自变量. 在剔除相应的 x_i 后，再重复前述做法，直到没有可剔除的自变量为止.

16.3 MATLAB 统计工具箱中的回归分析命令

MATLAB 统计工具箱中提供了一些回归分析的命令，现介绍如下.

16.3.1 多元线性回归

多元线性回归的命令是 regress，此命令也可用于一元线性回归. 其格式如下：

1. 确定回归系数的点估计值，用命令：b = regress(Y,X).
2. 求回归系数的点估计和区间估计，并检验回归模型，用命令：

```
[b, bint,r,rint,stats] = regress(Y,X,alpha)
```

3. 画出残差及其置信区间，用命令：

```
rcoplot(r,rint)
```

上述命令中，各符号的含义如下：

(1) b、Y、X 见第 16.2 的(5)式，其中 b 为回归系数的点估计值 $\hat{\beta}$，即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

对一元线性回归，取 $k = 1$ 即可；

(2) alpha 为显著性水平(缺省时为 0.05)；

(3) bint 为回归系数的区间估计；

(4) r 与 rint 分别为残差及其置信区间；

(5) stats 是用于检验回归模型的统计量，有三个数值，第一个是相关系数 R^2(见 16.2 节的(7)式)，R^2 越接近 1，说明回归方程越显著；第二个是 F 值(见第 16.2 节的(6)式)，$F > F_{1-\alpha}(k, n-k-1)$ 时拒绝 H_0，F 越大，说明回归方程越显著；第三个是与 F 对应的概率 P，$P < \alpha$ 时拒绝 H_0，回归模型成立.

例 1 对 16.1 的例 1，求解如下：

(1) 输入数据：

```
x = [143 145 146 147 149 150 153 154 155 156 157 158 159 160 162 164]';
X = [ones(16,1) x];
Y = [88 85 88 91 92 93 93 95 96 98 97 96 98 99 100 102]';
```

（2）回归分析及检验：

```
[b,bint,r,rint,stats] = regress(Y,X);
b,bint,stats
```

得结果：

```
b =
   -16.0730
    0.7194
bint =
   -33.7071   1.5612
    0.6047    0.8340
stats =
    0.9282   180.9531   0.0000
```

即 $\hat{\beta}_0 = -16.073$；$\hat{\beta}_1 = 0.7194$；$\hat{\beta}_0$ 的置信区间为[-33.7017, 1.5612]，$\hat{\beta}_1$ 的置信区间为[0.6047,0.834]；$R^2 = 0.9282$，$F = 180.9531$，$P = 0.0000$，$P < 0.05$，可知回归模型

$$y = -16.073 + 0.7194x \text{ 成立.}$$

（3）残差分析，作残差图：

```
rcoplot(r,rint)
```

得图 16－3. 从残差图可以看出，除第二个数据外，其余数据的残差离零点均较近，且残差的置信区间均包含零点，这说明回归模型

$$y = -16.073 + 0.7194x$$

能较好的符合原始数据，而第二个数据可视为异常点.

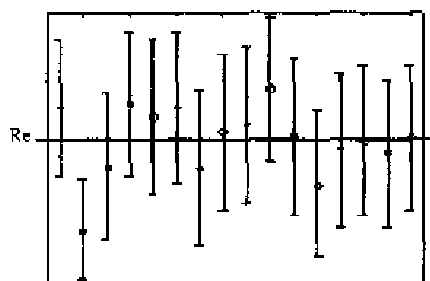


图 16－3

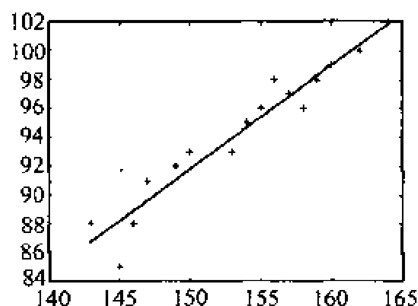


图 16－4

（4）预测及作图：

```
z = b(1) + b(2) * x
plot(x,Y,'k+',x,z,'r')
```

得各数据点及回归方程的图形如图 16－4. 可以看出，只有第二个数据点离回归直线距离较远.

16.3.2 多项式回归

1. 一元多项式回归

一元多项式回归可用命令 polyfit，polyval，polyconf 来实现. 命令格式如下：

(1) 回归:回归可用以下两个命令之一:

① 确定多项式系数的命令:[p,S]=polyfit(x,y,m).

其中,x=(x1,x2,…,xn),y=(y1,y2,…,yn),p=(a1,a2,…,am+1)是多项式 $y=a_1x^m+a_2x^{m-1}+\cdots+a_mx+a_{m+1}$ 的系数;S 是一个矩阵,用来估计预测误差.

② 一元多项式回归命令:polytool(x,y,m).

此命令产生一个交互式的画面,画面中有拟合曲线和 y 的置信区间.通过左下方的 Export 下拉式菜单,可以输出回归系数等.

(2) 预测和预测误差估计:

① Y=polyval(p,x)求 polyfit 所得的回归多项式在 x 处的预测值 Y;

② [Y,DELTA]=polyconf(p,x,S,alpha)求 polyfit 所得的回归多项式在 x 处的预测值 Y 及预测值的显著性为 1-alpha 的置信区间 Y±DELTA;alpha 缺省时为 0.05.

一元多项式回归也可化为多元线性回归来解.

例 2 观测物体降落的距离 s 与时间 t 的关系,得到数据如下表,求 s 关于 t 的回归方程

$$\hat{s}=a+bt+ct^2$$

t(s)	1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	6/30	7/30
s(cm)	11.86	15.67	20.60	26.69	33.71	41.93	51.13
t(s)	8/30	9/30	10/30	11/30	12/30	13/30	14/30
s(cm)	61.49	72.90	85.44	99.08	113.77	129.54	146.48

方法一 用一元多项式回归:

(1) 输入数据:

```
t=1/30:1/30:14/30;
s=[11.86 15.67 20.60 26.69 33.71 41.93 51.13 61.49 72.90 85.44 99.08
   113.77 129.54 146.48];
```

(2) 作二次多项式回归:

```
[p,S]=polyfit(t,s,2)
```

得结果:p =

```
        489.2946   65.8896   9.1329
    S =
        R:[3x3 double]
        df: 11
        normr: 0.1157
```

即回归模型为

$$\hat{s}=489.294\,6t^2+65.889\,6t+9.132\,9$$

(3) 预测及作图:

```
Y=polyconf(p,t,S)
plot(t,s,'k+',t,Y,'r')
```

得试验点与回归曲线的图形(图 16－5).

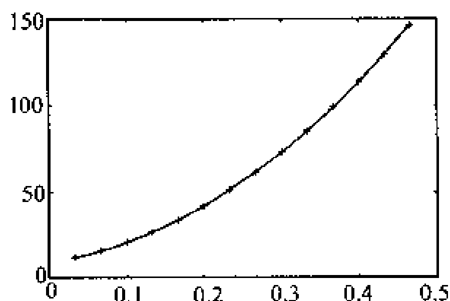


图 16－5

方法二 化为多元线性回归:

```
T=[ones(14,1) t'(t.^2)'];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(s',T);
b,stats
```

得结果:b =

```
        9.1329
        65.8896
        489.2946
  stats =
          1.0e+007 *
          0.0000   1.0378   0
```

可以看出,两种方法得出的结果是一样的.

2. 多元二项式回归

多元二项式回归用命令:rstool(x,y,'model', alpha).

其中,输入数据 x、y 分别为 $n \times m$ 矩阵和 n 维列向量;alpha 为显著性水平(缺省时为 0.05);model 由下列 4 个模型中选择 1 个(用字符串输入,缺省时为线性模型):

linear(线性):$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$

purequadratic(纯二次):$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \sum_{j=1}^{m} \beta_{jj} x_j^2$

interaction(交叉):$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \sum_{1 \leq j \neq k \leq m} \beta_{jk} x_j x_k$

quadratic(完全二次):$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \sum_{1 \leq j,k \leq m} \beta_{jk} x_j x_k$

命令 rstool 产生一个交互式画面,画面中有 m 个图形,这 m 个图形分别给出了一个独立变量 xi(另 $m-1$ 个变量取固定值)与 y 的拟合曲线,以及 y 的置信区间.可以通过键入不同的 xi 的值来获得相应的 y 值.

图的左下方有两个下拉式菜单,一个菜单 Export 用以向 Matlab 工作区传送数据,包括 beta(回归系数)、rmse(剩余标准差)、residuals(残差).另一个菜单 model 用以在上述 4

个模型中选择.可以分别选 4 个模型,并比较它们的剩余标准差,其中剩余标准差最接近于 0 的模型是最好的.

例 3 设某商品的需求量与消费者的平均收入、商品价格的统计数据如下,建立回归模型,预测平均收入为 1000、价格为 6 时的商品需求量.

需求量	100	75	80	70	50	65	90	100	110	60
收入	1000	600	1200	500	300	400	1300	1100	1300	300
价格	5	7	6	6	8	7	5	4	3	9

选择纯二次模型,即

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2$$

方法一:用多元二项式回归命令

(1) 数据输入:

```
x1 =[1000 600 1200 500 300 400 1300 1100 1300 300];
x2 =[5 7 6 6 8 7 5 4 3 9];
y =[100 75 80 70 50 65 90 100 110 60]';
x =[x1' x2'];
```

(2) 回归、检验及预测:

```
rstool(x,y,'purequadratic')
```

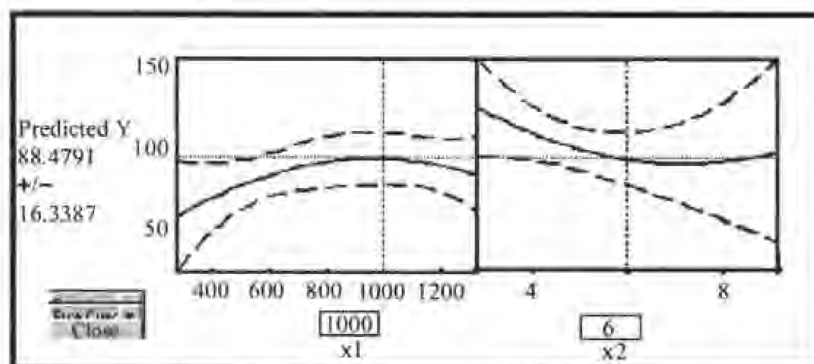


图 16-6

得到一个交互式画面(图 16-6),给出两幅图形,左边是 x_2 固定时的曲线 $y(x_1)$ 及其置信区间,右边是 x_1 固定时的曲线 $y(x_2)$ 及其置信区间.

在左边图形下方的方框中输入 1000,右边图形下方的方框中输入 6,则画面左边的"Predicted Y"下方的数据变为 88.479 81,即预测出平均收入为 1000、价格为 6 时的商品需求量为 88.479 81.

在画面左下方的下拉式菜单中选"all", 则 beta、rmse 和 residuals 都传送到 Mat-

lab 工作区中.在 Matlab 工作区中输入命令:

```
beta,rmse
```

得结果:beta =

```
110.5313
0.1464
-26.5709
-0.0001
1.8475
rmse =
4.5362
```

故回归模型为:

$$y = 110.5313 + 0.1464x_1 - 26.5709x_2 - 0.0001x_1^2 + 1.8475x_2^2$$

剩余标准差为 4.536 2,说明此回归模型的显著性较好.

方法二 化为多元线性回归:

```
X = [ones(10,1) x1' x2' (x1.^2)' (x2.^2)'];
[b,bint,r,rint,stats] = regress(y,X);
b,stats
```

结果为:b =

```
110.5313
0.1464
-26.5709
-0.0001
1.8475
stats =
0.9702   40.6656   0.0005
```

可以看出,两种方法的结果是一样的.Stats 中第一个数据与 1 非常接近,第三个数据与 0 非常接近,这说明所得的回归模型的显著性很好.

16.3.3 非线性回归

非线性回归可用命令 nlinfit,nlintool,nlpredci 来实现.命令格式如下:

1.回归:回归可用以下两个命令之一:

(1) 确定回归系数的命令:[beta,r,J] = nlinfit(x,y,'model',beta0)

其中,输入数据 x、y 分别为 $n \times m$ 矩阵和 n 维列向量,对一元非线性回归,x 为 n 维列向量;model 是事先用 M 文件定义的非线性函数;beta0 是回归系数的初值.beta 是估计出的回归系数,r(残差)、J(Jacobian 矩阵)是估计预测误差需要的数据.

(2) 非线性回归命令:nlintool(x,y,'model', beta0,alpha)

其中各参数含义同前,alpha 为显著性水平,缺省时为 0.05.命令产生一个交互式的画面,画面中有拟合曲线和 y 的置信区间.通过左下方的 Export 下拉式菜单,可以输出回归系数等.

2. 预测和预测误差估计:

```
[Y,DELTA] =nlpredci('model', x,beta,r,J)
```

求 nlinfit 或 nlintool 所得的回归函数在 x 处的预测值 Y 及预测值的显著性为 1 - alpha 的置信区间 Y ± DELTA.

某些非线性回归也可化为多元线性回归来解.

例 4 对 14.1 的例 2,求解如下:

(1) 对将要拟合的非线性模型 $y = ae^{-b/x}$,建立 M 文件 volum.m 如下:

```
function yhat =volum(beta,x)
yhat =beta(1) * exp(beta(2)./x);
```

(2) 输入数据:

```
x =2:16;
y =[6.42 8.20 9.58 9.5 9.7 10 9.93 9.99 10.49 10.59 10.60 10.80 10.60
    10.90 10.76];
beta0 =[8 2]';
```

(3) 求回归系数:

```
[beta,r ,J] =nlinfit(x',y','volum',beta0);
beta
```

得结果:beta =

```
        11.6036
        -1.0641
```

即得回归模型为:$y = 11.6036e^{-\frac{1.06441}{x}}$

(4) 预测及作图:

```
[YY,delta] =nlpredci('volum',x',beta,r,J);
plot(x,y,'k+',x,YY,'r')
```

得实际值与回归曲线的图形(图 16-7).

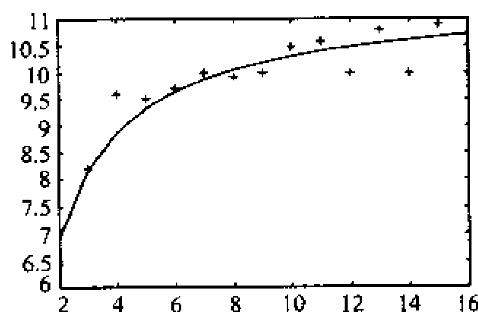


图 16-7

例 5 财政收入预测问题:财政收入与国民收入、工业总产值、农业总产值、总人口、就业人口、固定资产投资等因素有关.下表列出了 1952—1981 年的原始数据,试构造预测模型.

年份	国民收入（亿元）	工业总产值（亿元）	农业总产值（亿元）	总人口（万人）	就业人口（万人）	固定资产投资（亿元）	财政收入（亿元）
1952	598	349	461	57 482	20 729	44	184
1953	586	455	475	58 796	21 364	89	216
1954	707	520	491	60 266	21 832	97	248
1955	737	558	529	61 465	22 328	98	254
1956	825	715	556	62 828	23 018	150	268
1957	837	798	575	64 653	23 711	139	286
1958	1 028	1 235	598	65 994	26 600	256	357
1959	1 114	1 681	509	67 207	26 173	338	444
1960	1 079	1 870	444	66 207	25 880	380	506
1961	757	1 156	434	65 859	25 590	138	271
1962	677	964	461	67 295	25 110	66	230
1963	779	1 046	514	69 172	26 640	85	266
1964	943	1 250	584	70 499	27 736	129	323
1965	1 152	1 581	632	72 538	28 670	175	393
1966	1 322	1 911	687	74 542	29 805	212	466
1967	1 249	1 647	697	76 368	30 814	156	352
1968	1 187	1 565	680	78 534	31 915	127	303
1969	1 372	2 101	688	80 671	33 225	207	447
1970	1 638	2 747	767	82 992	34 432	312	564
1971	1 780	3 156	790	85 229	35 620	355	638
1972	1 833	3 365	789	87 177	35 854	354	658
1973	1 978	3 684	855	89 211	36 652	374	691
1974	1 993	3 696	891	90 859	37 369	393	655
1975	2 121	4 254	932	92 421	38 168	462	692
1976	2 052	4 309	955	93 717	38 834	443	657
1977	2 189	4 925	971	94 974	39 377	454	723
1978	2 475	5 590	1 058	96 259	39 856	550	922
1979	2 702	6 065	1 150	97 542	40 581	564	890
1980	2 791	6 592	1 194	98 705	41 896	568	826
1981	2 927	6 862	1 273	100 072	43 280	496	810

设国民收入、工业总产值、农业总产值、总人口、就业人口、固定资产投资分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6，财政收入为 y，设变量之间的关系为：

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 + fx_6$$

使用非线性回归方法.

（1）对回归模型建立 M 文件 model.m 如下：

```
function yy = model(beta0,X)
        a = beta0(1);
        b = beta0(2);
```

```
c = beta0(3);
d = beta0(4);
e = beta0(5);
f = beta0(6);
x1 = X(:,1);
x2 = X(:,2);
x3 = X(:,3);
x4 = X(:,4);
x5 = X(:,5);
x6 = X(:,6);
yy = a * x1 + b * x2 + c * x3 + d * x4 + e * x5 + f * x6;
```

(2) 主程序 liti6.m 如下:

```
X = [598.00   349.00   461.00 57482.00 20729.00   44.00
     586.00   455.00   475.00 58796.00 21364.00   89.00
     707.00   520.00   491.00 60266.00 21832.00   97.00
     737.00   558.00   529.00 61465.00 22328.00   98.00
     825.00   715.00   556.00 62828.00 23018.00   150.00
     837.00   798.00   575.00 64653.00 23711.00   139.00
     1028.00 1235.00   598.00 65994.00 26600.00   256.00
     1114.00 1681.00   509.00 67207.00 26173.00   338.00
     1079.00 1870.00   444.00 66207.00 25880.00   380.00
     757.00 1156.00   434.00 65859.00 25590.00   138.00
     677.00   964.00   461.00 67295.00 25110.00   66.00
     779.00 1046.00   514.00 69172.00 26640.00   85.00
     943.00 1250.00   584.00 70499.00 27736.00   129.00
     1152.00 1581.00   632.00 72538.00 28670.00   175.00
     1322.00 1911.00   687.00 74542.00 29805.00   212.00
     1249.00 1647.00   697.00 76368.00 30814.00   156.00
     1187.00 1565.00   680.00 78534.00 31915.00   127.00
     1372.00 2101.00   688.00 80671.00 33225.00   207.00
     1638.00 2747.00   767.00 82992.00 34432.00   312.00
     1780.00 3156.00   790.00 85229.00 35620.00   355.00
     1833.00 3365.00   789.00 87177.00 35854.00   354.00
     1978.00 3684.00   855.00 89211.00 36652.00   374.00
     1993.00 3696.00   891.00 90859.00 37369.00   393.00
     2121.00 4254.00   932.00 92421.00 38168.00   462.00
     2052.00 4309.00   955.00 93717.00 38834.00   443.00
     2189.00 4925.00   971.00 94974.00 39377.00   454.00
```

```
        2475.00 5590.00 1058.00 96259.00 39856.00  550.00
        2702.00 6065.00 1150.00 97542.00 40581.00  564.00
        2791.00 6592.00 1194.00 98705.00 41896.00  568.00
        2927.00 6862.00 1273.00 100072.0 43280.00  496.00];
    y =[184.00 216.00 248.00 254.00 268.00 286.00 357.00 444.00 506.00 …
        271.00 230.00 266.00 323.00 393.00 466.00 352.00 303.00 447.00 …
        564.00 638.00 658.00 691.00 655.00 692.00 657.00 723.00 922.00 …
        890.00 826.00 810.0]';
    beta0 =[0.50 -0.03 -0.60 0.01 -0.02 0.35];
    betafit =nlinfit(X,y,'model',beta0)
```

结果为：

```
    betafit =
              0.5243
             -0.0294
             -0.6304
              0.0112
             -0.0230
              0.3658
```

即

$$y = 0.5243x_1 - 0.0294x_2 - 0.6304x_3 + 0.0112x_4 - 0.0230x_5 + 0.3658x_6$$

16.3.4 逐步回归

逐步回归的命令是 stepwise，它提供了一个交互式画面，通过此工具可以自由地选择变量，进行统计分析.其通常用法是：

```
    stepwise(x,y,inmodel,alpha)
```

其中 x 是自变量数据，y 是因变量数据，分别为 $n\times m$ 和 $n\times 1$ 矩阵，inmodel 是矩阵的列数的指标，给出初始模型中包括的子集(缺省时设定为全部自变量)，alpha 为显著性水平(缺省时为 0.5).

运行 stepwise 命令时产生三个图形窗口：Stepwise Plot，Stepwise Table，Stepwise History.所有这些图形界面都有热区，即当鼠标移到图形的某个区域时，鼠标的指针会变成一个小圆，点击后会产生交互的作用.

在 Stepwise Plot 窗口，显示出各项的回归系数及其置信区间.其中点表示回归系数的值，点两边的水平(实或虚)直线段表示其置信区间；虚线表示该变量的拟合系数与 0 无显著差异，实线则表示有显著差异；绿色的线表示当前在模型中的项，红色的线表示当前不在模型中的项.点击一条线会改变其状态，即在模型中的项(绿线)会被移去(变为红线)，不在模型中的项(红线)会被加入(变为绿线).此窗口中的 Export 下拉式菜单可以向 Matlab 工作区传送各种数据.

Stepwise Table 窗口中列出了一个统计表，包括回归系数及其置信区间，以及模型的统计量剩余标准差(RMSE)、相关系数(R-square)、F 值、与 F 对应的概率 P.

下面通过一个例子说明 setpwise 的用法.

例 6 水泥凝固时放出的热量 y 与水泥中 4 种化学成分 x_1、x_2、x_3、x_4 有关，今测得一组数据

如下，试用逐步回归法确定一个线性模型.

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_1	7	1	11	11	7	11	3	1	2	21	1	11	10
x_2	26	29	56	31	52	55	71	31	54	47	40	66	68
x_3	6	15	8	8	6	9	17	22	18	4	23	9	8
x_4	60	52	20	47	33	22	6	44	22	26	34	12	12
y	78.5	74.3	104.3	87.6	95.9	109.2	102.7	72.5	93.1	115.9	83.8	113.3	109.4

（1）数据输入：

```
x1 =[7 1 11 11 7 11 3 1 2 21 1 11 10]';
x2 =[26 29 56 31 52 55 71 31 54 47 40 66 68]';
x3 =[6 15 8 8 6 9 17 22 18 4 23 9 8]';
x4 =[60 52 20 47 33 22 6 44 22 26 34 12 12]';
y =[78.5 74.3 104.3 87.6 95.9 109.2 102.7 72.5 93.1 115.9 83.8 113.3 109.4]';
x =[x1 x2 x3 x4];
```

（2）逐步回归：

1）先在初始模型中取全部自变量：

```
stepwise(x,y)
```

得图 Stepwise Plot（图 16－8）和表 Stepwise Table（图 16－9）.图 Stepwise Plot 中四条直线都是虚线，说明模型的显著性不好，从表 Stepwise Table 中看出变量 x_3 和 x_4 的显著性最差.

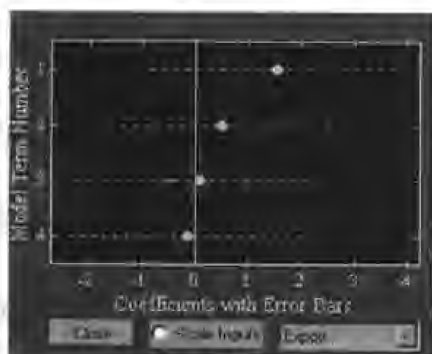


图 16－8

Column #	Parameter	Confidence Intervals Lower	Upper
1	1.551	-0.8319	3.934
2	0.5102	-1.806	2.826
3	0.1019	-2.313	2.517
4	-0.1441	-2.413	2.125

RMSE	R-square	F	P
2.446	0.9824	111.5	4.756e-007

Close Help

图 16－9

2）移去变量 x_3 和 x_4.

在图 Stepwise Plot 中点击直线 3 和直线 4，这两条直线变为红色，同时直线 1 和直线 2 变为实线，结果见图 16－10 和图 16－11.说明移去变量 x_3 和 x_4 后模型具有显著性.

从新的统计结果看出，虽然剩余标准差（RMSE）没有太大的变化，但是统计量 F 的值明显增大，因此新的回归模型更好.

3）对变量 y 和 x_1、x_2 作线性回归：

```
X = [ones(13,1) x1 x2];
b = regress(y,X)
```

得结果：b =

52.5773
1.4683
0.6623

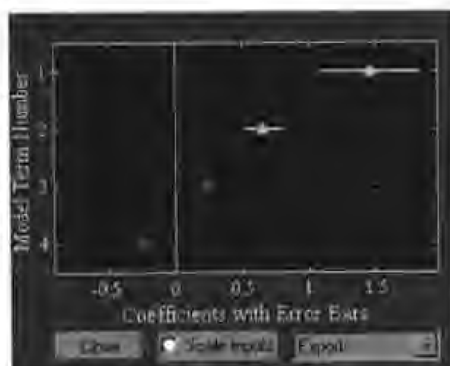


图 16 - 10



图 16 - 11

故最终模型为：$y = 52.5773 + 1.4683x_1 + 0.6623x_2$.

16.4 习　　题

1. 考察温度 x 对产量 y 的影响，测得下列 10 组数据：

温度(℃)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
产量(kg)	13.2	15.1	16.4	17.1	17.9	18.7	19.6	21.2	22.5	24.3

求 y 关于 x 的线性回归方程，检验回归效果是否显著，并预测 $x = 42$℃ 时产量的估值及预测区间（置信度 95%）.

2. 某零件上有一段曲线，为了在程序控制机床上加工这一零件，需要求这段曲线的解析表达式，在曲线横坐标 x_i 处测得纵坐标 y_i 共 11 对数据如下：

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y_i	0.6	2.0	4.4	7.5	11.8	17.1	23.3	31.2	39.6	49.7	61.7

求这段曲线的纵坐标 y 关于横坐标 x 的二次多项式回归方程.

3. 混凝土的抗压强度随养护时间的延长而增加，现将一批混凝土作成 12 个试块，记录了养护日期 x（日）及抗压强度 y（kg/cm^2）的数据：

养护时间 x	2	3	4	5	7	9	12	14	17	21	28	56
抗压强度 y	35	42	47	53	59	65	68	73	76	82	86	99

试求 $\hat{y}=a+b\ln x$ 型回归方程.

4. 在研究化学动力学反应过程中,建立了一个反应速度和反应物含量的数学模型,形式为

$$y=\frac{\beta_1 x_2-\dfrac{x_3}{\beta_5}}{1+\beta_2 x_1+\beta_3 x_2+\beta_4 x_3}$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_5$ 是未知参数,x_1,x_2,x_3 是三种反应物(氢,n 戊烷,异构戊烷)的含量,y 是反应速度. 今测得一组数据如下表,试由此确定参数 $\beta_1,\cdots,\beta_5$($\beta_1,\cdots,\beta_5$ 的参考值为 1,0.05, 0.02, 0.1, 2).

序号	反应速度 y	氢 x_1	n 戊烷 x_2	异构戊烷 x_3
1	8.55	470	300	10
2	3.79	285	80	10
3	4.82	470	300	120
4	0.02	470	80	120
5	2.75	470	80	10
6	14.39	100	190	10
7	2.54	100	80	65
8	4.35	470	190	65
9	13.00	100	300	54
10	8.50	100	300	120
11	0.05	100	80	120
12	11.32	285	300	10
13	3.13	285	190	120

5. 某地区作物生长所需的营养素主要是氮(N)、钾(K)、磷(P). 某作物研究所在该地区对土豆与生菜做了一定数量的实验,实验数据如下表所示,其中 ha 表示公顷,t 表示吨,kg 表示千克. 当一个营养素的施肥量变化时,总将另两个营养素的施肥量保持在第七个水平上,如对土豆产量关于氮(N)的施肥量做实验时,磷(P)与钾(K)的施肥量做实验时,磷(P)与钾(K)的施肥量分别取为196 kg/ha与 372 kg/ha.

试分析施肥量与产量之间关系,并对所得结果从应用价值与如何改进等方面作出估价.

N		P		K	
施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	15.18	0	0	0	18.98
34	21.36	24	47	47	27.35
67	25.72	49	93	93	34.86
101	32.29	73	140	140	38.52
135	34.03	98	186	186	38.44
202	39.45	147	279	279	37.73
259	43.15	196	372	372	38.43
336	43.46	245	465	465	43.87
404	40.83	294	558	558	42.77
471	30.75	342	651	651	46.22
0	11.02	0	6.39	0	15.75
28	12.70	49	9.48	47	16.76
56	14.56	98	12.46	93	16.89
84	16.27	147	14.33	140	16.24
112	17.75	196	17.10	186	17.56
168	22.59	294	21.94	279	19.20
224	21.63	391	22.64	372	17.97
280	19.34	489	21.34	465	15.84
336	16.12	587	22.07	558	20.11
392	14.11	685	24.53	651	19.40

第 17 章　计算机模拟

在实际问题中，大量问题很难用数学模型来描述，或有些问题虽建立起了数学模型，但由于模型中随机因素很多，难于用解析的方法求解，这时就需要借助于模拟的方法.

模拟又称为仿真. 它的基本思想是建立一个试验的模型，这个模型包含有所研究的系统中的主要特点. 通过这个实验模型的运行，获得所要研究系统的必要信息. 一些较简单的问题可以用手工的方法求解，而比较复杂的问题则要借助计算机来进行模拟计算.

17.1　蒙特卡罗法

蒙特卡罗(Monte Carlo)方法是一种应用随机数来进行模拟试验的方法. 此方法对研究的系统进行随机观察抽样，通过对样本值的观察统计，求得所研究系统的某些参数.

例 1　在我方某前沿防守地域，敌人以一个炮排(含两门火炮)为单位对我方进行干扰和破坏. 为躲避我方打击，敌方对其阵地进行了伪装并经常变换射击地点. 经过长期观察发现，我方指挥所对敌方目标的指示有 50% 是准确的，而我方火力单位，在指示正确时，有 1/3 的射击效果能毁伤敌人一门火炮，有 1/6 的射击效果能全部消灭敌人. 现在希望能用某种方式把我方将要对敌人实施的 20 次打击结果显现出来，确定有效射击的比率及毁伤敌方火炮的平均值.

这是一个概率问题，可以通过理论计算得到相应的概率和期望值. 但这样只能给出作战行动的最终静态结果，而显示不出作战行动的动态过程.

为了能显示我方 20 次射击的过程，必须用某种方式模拟出以下两件事：一是观察所对目标的指示正确或不正确；二是正确指示时，我方火力单位的射击结果.

对第一件事进行模拟试验时有两种结果，每一种结果出现的概率都是 1/2. 因此，可用投掷一枚硬币的方式予以确定，当硬币出现正面时为指示正确，反之为不正确. 对第二件事进行模拟试验时有三种结果：毁伤一门火炮的可能性为 1/3，毁伤两门的可能性为 1/6，没能毁伤敌火炮的可能性为 1/2. 这时，可用投掷骰子的方法来确定，如果出现的是 1、2、3 三个点则认为没能击中敌人，如果出现的是 4、5 点则认为毁伤敌人一门火炮，若为 6 点则认为毁伤敌人两门火炮. 设计一个模拟过程框图(图 17－1).

i：要模拟的打击次数

k_1：没击中敌人火炮的射击总数；

k_2：击中敌人一门火炮的射击总数；

k_3：击中敌人两门火炮的射击总数.

E：有效射击比率；

E_1：20 次射击平均每次毁伤敌人的火炮数.

通过上面的方式，就可把我方 20 次射击的过程动态地显现出来，如表 17－1.

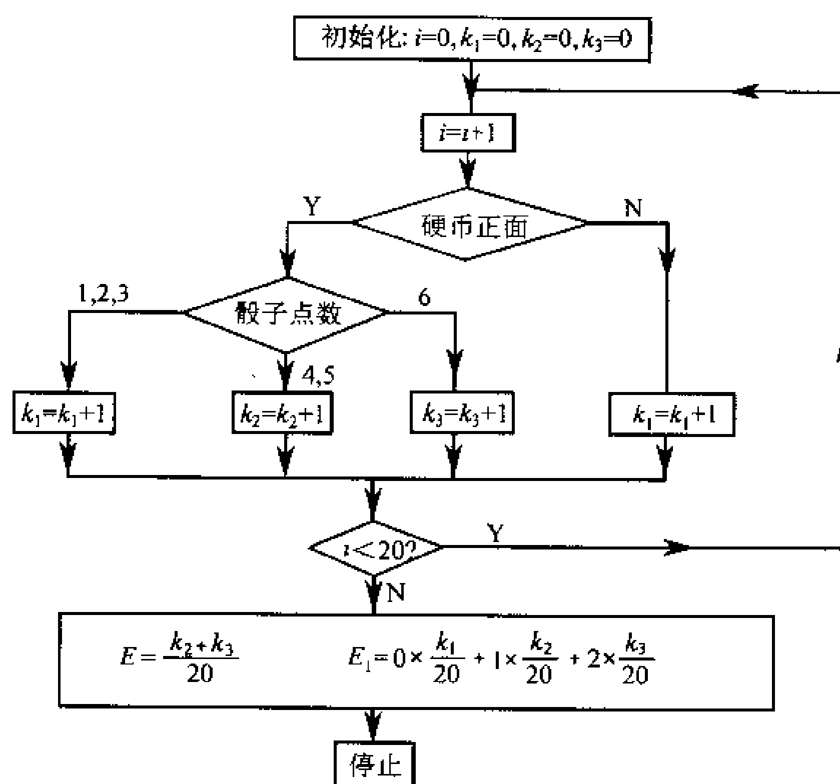


图 17－1

表 17－1

试验序号	投硬币结果	指示正确	指示不正确	掷骰子结果	消灭敌人火炮数		
					0	1	2
1	正	V		4		V	
2	正	V		4		V	
3	反		V				
4	正	V		1	V		
5	正	V		2	V		
6	反		V				
7	正	V		3	V		
8	正	V		6			V
9	反		V				
10	反		V				

续表

试验序号	投硬币结果	指示正确	指示不正确	掷骰子结果	消灭敌人火炮数		
					0	1	2
11	正	V		2	V		
12	反		V				
13	正	V		3	V		
14	反		V				
15	正	V		6			V
16	正	V		4		V	
17	正	V		2	V		
18	正	V		4		V	
19	反		V				
20	正			6			V

从以上模拟结果可计算出：

$$E = 7/20 = 0.35$$

$$E_1 = 0 \times \frac{13}{20} + 1 \times \frac{4}{20} + 2 \times \frac{3}{20} = 0.5$$

从理论上分析，设：

$$j = \begin{cases} 0, & \text{观察所对目标指示不正确} \\ 1, & \text{观察所对目标指示正确} \end{cases}$$

A_0：射中敌方火炮的事件；

A_1：射中敌方一门火炮的事件；

A_2：射中敌方两门火炮的事件.

则由全概率公式，有

$$E = P(A_0) = P(j=0)P(A_0 \mid j=0) + P(j=1)P(A_0 \mid j=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.25$$

$$P(A_1) = P(j=0)P(A_1 \mid j=0) + P(j=1)P(A_1 \mid j=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2) = P(j=0)P(A_2 \mid j=0) + P(j=1)P(A_2 \mid j=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$E_1 = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} \approx 0.33$$

理论计算和模拟结果的比较如表 17－2 所示.

表 17－2　理论计算和模拟结果的比较

分类 / 项目	无效射击	有效射击	平均值
模　　拟	0.65	0.35	0.5
理　　论	0.75	0.25	0.33

虽然模拟结果与理论计算不完全一致，但它却能更加真实地表达实际战斗动态过程.

通过上面这个简单的例子可以看出，用蒙特卡罗方法进行模拟，首先要设计一个逻辑框图，即模拟模型. 这个框图要正确反映系统各部分运行时的逻辑关系，其次是如何模拟随机现象. 由于这个问题中观察所对目标指示的正确性是等概率的，而我方的射击结果也可转化为等概率的，故可以用投硬币和掷骰子的方法来模拟抽样，而如果随机变量具有其他形式的概率分布，则需要研究具有各种概率分布的模拟随机数的产生方法.

17.2　模拟随机数的产生

为了产生具有一定分布的随机数，一般采用如图 17－2 所示的程序. 首先要有一个等概率密度随机数发生器，一般计算机上都有专门的程序，产生 0～1 之间等概率密度分布的随机数，使用时直接调用即可；将此 0～1 间的随机数进行一定的数字转换即可获得所要求的随机数，怎样进行数字转换则视所要求的分布函数来定.

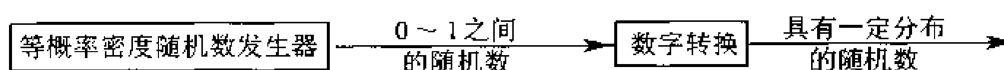


图 17－2　随机数的产生

假定将[0,1]区间的均匀随机数记作 R，则[a ,b]区间的均匀随机数可按下述公式由[0, 1]区间的均匀随机数产生：

$$x = a + R(b - a)$$

17.2.1　逆转换法

这是求概率分布的逆函数从而产生随机数的方法. 因概率分布函数 $F(x)$ 为定义在[0,1]区间的单调递增函数，设 R 为区间[0,1]的均匀随机变量，令 $F(x)=R$，只要求出逆函数 $x=F^{-1}(R)$，x 即为具有概率分布函数 $F(x)$ 的随机数.

例 1　产生参数为 λ 的负指数分布的模拟随机数数列.

解　负指数分布的概率密度函数：$f(x)=\lambda e^{-\lambda t}$. 分布函数：

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

因 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，故 $0 \leqslant 1-F(x) \leqslant 1$. 令

$$1 - F(x) = e^{-\lambda t} = R$$

则 $x=-\frac{1}{\lambda}\ln R$.

例 2 离散分布随机数的产生：设 x 为预测某公司投放某种产品到市场的数量，其数量与概率如表 17－3 所示，求概率为 $P(x)$ 的随机数列 x.

表 17－3

x	10	24	40	60
$P(x)$	0.28	0.14	0.30	0.28

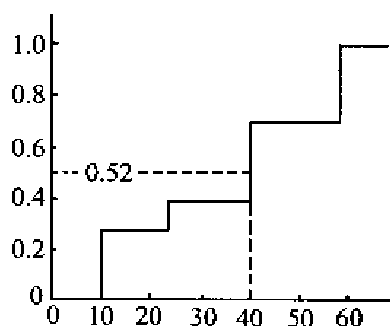


图 17－3

解 利用累积概率分布即可进行转换计算，如图 17－3 所示. 若等概率密度发生器产生了某一数 R，如 $R=0.52$，在图 17－3 的纵轴上找到 0.52，根据累积概率分布曲线即可找到随机数的数值 $x=40$. 图 17－3 中的数字转换规律如表 17－4 所示.

表 17－4

R	(0，0.28)	(0.28，0.42)	(0.42，0.72)	(0.72，1)
x	10	24	40	60

17.2.2 组合法

组合法是利用某些容易产生随机数数列的随机变量，通过组合得到所要求的随机变量的一种方法.

例 3 产生泊松分布的模拟随机数列.

解 如相继两个事件出现的间隔时间为负指数分布，则在某一时间间隔内事件出现的次数服从泊松分布. 根据此关系，可以用负指数分布的随机变量来组合产生泊松分布的随机数序列.

设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为参数 λ 的负指数分布的随机数序列，因为有

$$y_i=-\frac{1}{\lambda}\ln R_i$$

所以，将 y_i 值按序累加，使得满足关系式：

$$\sum_{i=0}^{x}y_i\leqslant 1\leqslant\sum_{i=0}^{x+1}y_i$$

则求得的 x 就是参数 λ 的泊松分布的随机数.

例 4 敌坦克分队对我方阵地实施突袭,其到达规律符合泊松流,平均每分钟到达 4 辆. 试模拟敌坦克在 3 min 内到达目标区的数量及到达时间,以及在第 1、2、3 min 内各到达几辆坦克.

解 由题设,$\lambda=4$(辆/min). 根据排队论知识,目标到达服从泊松流与两目标到达的时间间隔服从同一参数的负指数分布是等价的. 因而,只需利用 λ 产生一列服从指数分布的随机数来模拟任两坦克到达的间隔时间即可,其计算过程如表 17－5.

表 17－5

序号	R_i	$y_i=-\frac{1}{4}\ln R_i$	$t_i=t_{i-1}+y_i$	序号	R_i	$y_i=-\frac{1}{4}\ln R_i$	$t_i=t_{i-1}+y_i$
1	0.130	0.510	0.510	8	0.805	0.054	1.643
2	0.351	0.262	0.772	9	0.699	0.090	1.772
3	0.645	0.110	0.882	10	0.983	0.004	1.737
4	0.645	0.110	0.992	11	0.326	0.280	2.017
5	0.680	0.096	1.088	12	0.129	0.512	2.629
6	0.398	0.230	1.318	13	0.146	0.481	3.010
7	0.338	0.271	1.598				

表中 R_i 为[0,1)中均匀分布的随机数,y_i 为参数 $\lambda=4$ 的负指数分布的随机数,可理解为相邻两辆坦克的到达时间间隔,t_i 为第 i 辆坦克的到达时刻,$t_0=0$, $t_i>3$ 时停止模拟.

从表中可看出,在 3 min 内共进入我方阵地 12 辆坦克.

经计算有:

$$\sum_{1}^{4} y_i < 1 < \sum_{1}^{5} y_i, \quad \text{所以 } x_1 = 4$$

$$\sum_{5}^{10} y_i < 1 < \sum_{5}^{11} y_i, \quad \text{所以 } x_2 = 6$$

$$\sum_{11}^{12} y_i < 1 < \sum_{11}^{13} y_i, \quad \text{所以 } x_3 = 2$$

故第 1 min 有 4 辆坦克到达,第 2 min 有 6 辆坦克到达,第 3 min 有 2 辆坦克到达.

17.2.3 近似法

这种方法一般用于随机变量的分布函数公式无法求出的情形.

例 5 产生正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的模拟随机数列.

解 由中心极限定理知:M 个独立同分布的随机变量 $R_i(i=1,2,\cdots,M)$ 之和的概率分布,当 M 很大时接近正态分布. 若 R_i 的均值为 μ_i,方差为 σ_i^2,则正态分布的均值、方差分别为 $\sum_{i=1}^{M}\mu_i$, $\sum_{i=1}^{M}\sigma_i^2$,即

$$\sum_{i=1}^{M} R_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{M}\mu_i, \sum_{i=1}^{M}\sigma_i^2\right)$$

令 R_i 为区间[0,1]内的均匀分布的随机数. 则 R_i 的概率密度为:

$$p(x_i) = 1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1$$

其均值和方差分别为：

$$\mu_i = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_i^2 = \int_0^1 [x - E(x)]^2 \cdot 1 \cdot dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

当 M 很大时，

$$\sum_{i=1}^{M} R_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{M} \mu_i, \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^2\right) = N\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}, \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{12}\right) = N\left(\frac{M}{2}, \frac{M}{12}\right)$$

这里，我们需产生均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布. 为此先将 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N\left(\frac{M}{2},\frac{M}{12}\right)$ 均化为标准正态分布 $N(0,1)$.

将 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 转化为 $t \sim N(0,1)$，作变换：

$$t = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{1}$$

则 $t \sim N(0,1)$.

将 $\sum_{i=1}^{M} R_i \sim N\left(\frac{M}{2},\frac{M}{12}\right)$ 转化为 $t \sim N(0,1)$，作变换：

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{M} R_i - \frac{M}{2}}{\sqrt{\frac{M}{12}}} \tag{2}$$

则 $t \sim N(0,1)$.

令(1)与(2)相等，得：

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{M} R_i - \frac{M}{2}}{\sqrt{\frac{M}{12}}}$$

即 $X = \mu + \sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{M} R_i - \frac{M}{2}}{\sqrt{\frac{M}{12}}}\right)$，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

实验证明，M 为 12 时已能获得很好的近似程度. 若取 $M = 12$，得：

$$X = \mu + \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6\right) \tag{3}$$

其中 $R_i(i = 1,2,\cdots,12)$ 为区间[0,1]的 12 个等概率密度随机数.

17.2.4 产生随机数的计算机命令

在 MATLAB 软件中，可以直接产生满足各种分布的随机数，命令如下：

1．产生 $m \times n$ 阶[0,1]均匀分布的随机数矩阵：rand(m,n)．产生一个[0,1]均匀分布的随

机数:rand.

2. 产生 $m\times n$ 阶 $[a,b]$ 均匀分布的随机数矩阵:unifrnd(a,b,m,n).产生一个 $[a,b]$ 均匀分布的随机数:unifrnd(a,b).

3. 产生 $m\times n$ 阶均值为 λ 的指数分布的随机数矩阵:exprnd(λ,m,n).产生一个均值为 λ 的指数分布的随机数:exprnd(λ).

4. 产生 $m\times n$ 阶均值为 λ 的泊松分布的随机数矩阵:poissrnd(λ,m,n).产生一个均值为 λ 的泊松分布随机数:poissrnd(λ).

5. 产生 $m\times n$ 阶均值为 μ,方差为 σ 的正态分布的随机数矩阵:normrnd(μ,σ,m,n).产生一个均值为 μ,方差为 σ 的正态分布随机数:normrnd(μ,σ).

下面对负指数分布与泊松分布作一简介.

1. 若连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

注意:参数为 λ 的指数分布的期望值为 $\frac{1}{\lambda}$,故在 MATLAB 中,产生参数为 λ 的指数分布的命令为:exprnd(1/λ)

2. 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots$,且取各个值的概率为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布. 参数为 λ 的泊松分布的期望值为 λ.

3. 如相继两个事件出现的间隔时间服从指数分布,则在某一时间间隔内事件出现的次数服从同一参数的泊松分布. 反之亦然.

对本章例 4,坦克到达的间隔时间应服从参数为 4 的指数分布,用 exprnd(1/4)模拟. 由以下程序 time.m 可得出 3 min 内每辆坦克的到达时刻 t.

```
clear
t =0;
j =0;
while t <3
    j =j +1
    t =t +exprnd(1 /4)
end
```

在第 1、2、3 min 内各到达的坦克数服从参数为 4 的泊松分布,可用 poissrnd(4)模拟.

17.3 排队模型的计算机模拟

排队论是一门研究随机服务系统工作过程的理论和方法. 在这类系统中,服务对象何时到达以及系统用于每个服务对象的服务时间是随机的. 排队论通过对每个个别的随机服务现象的统

计研究,找出反映这些随机现象平均特性的规律,从而为设计新的服务系统和改进现有服务系统的工作提供依据. 目前解析方法的应用基本上局限于服务对象到达以及服务时间都服从负指数分布的这一类最简单的排队系统. 对复杂的排队系统,如要用解析方法来解决,虽然在理论上做了不少的研究和探讨,但用其求解还比较困难和繁琐. 因此目前采用模拟的方法解决比较复杂的排队问题.

下面介绍一个简单的排队模型的计算机模拟方法.

例 1 单服务员的排队模型:在某商店有一个售货员,顾客陆续来到,售货员逐个地接待顾客. 当到来的顾客较多时,一部分顾客便须排队等待,被接待后的顾客便离开商店. 设:

a. 顾客到来间隔时间 θ 服从参数为 0.1 的指数分布.

b. 对顾客的服务时间 η 服从[4,15]上的均匀分布.

c. 排队按先到先服务规则,队长无限制.

假定时间以 min 为单位,一个工作日为 8 h. (1)模拟一个工作日内完成服务的个数及顾客平均等待时间 t. (2)模拟 100 个工作日,求出平均每日完成服务的个数及每日顾客的平均等待时间. 设:

w:总等待时间;

c_i:第 i 个顾客的到达时刻;

b_i:第 i 个顾客开始服务时刻;

e_i:第 i 个顾客服务结束时刻.

对问题(1),模拟过程见图 17-4 框图.

用 MATLAB 编程 simu1.m 如下.

```
clear
i =2;
w =0;
e(i -1) =0;
x(i) =exprnd(10);
c(i) =x(i);
b(i) =x(i);

while b(i) < =480
    y(i) =unifrnd(4,15);
    e(i) =b(i) +y(i);
    w =w +b(i) -c(i);
    i =i +1;
    x(i) =exprnd(10);
    c(i) =c(i -1) +x(i);
    b(i) =max(c(i),e(i -1));
end
i =i -2;
```

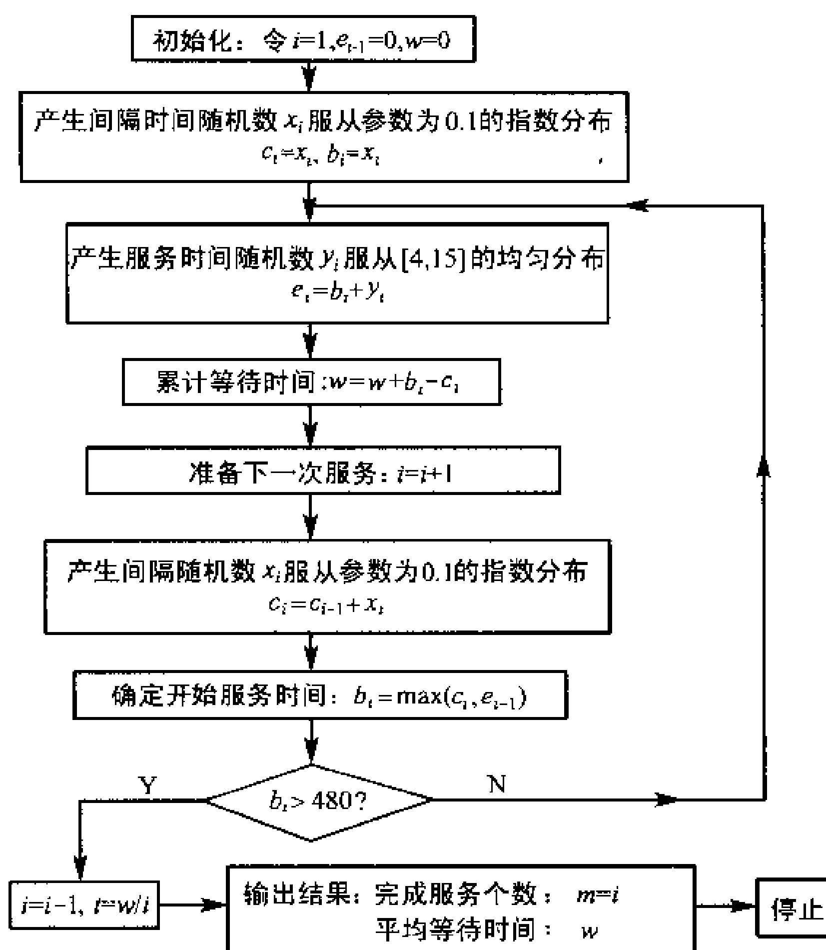


图 17－4

```
t = w/i
m = i
```

运行 simu1.m，模拟出一个工作日内完成服务的顾客数 $m=45$ 人，平均等待时间 $t=33$ min.

对问题(2)，将程序 simu1.m 略修改得程序 simu2.m 如下．

```
clear
cs = 100;
for j = 1:cs
    j
w(j) = 0;

i = 2;
x(i) = exprnd(10);
c(i) = x(i);
b(i) = x(i);
```

```
while b(i) < =480
    y(i) =unifrnd(4,15);
    e(i) =b(i) +y(i);
    w(j) =w(j) +b(i) -c(i);

    i =i +1;
    x(i) =exprnd(10);
    c(i) =c(i -1) +x(i);
    b(i) =max(c(i),e(i -1));
end

i =i -2;
     t(j) =w(j) /i;
     m(j) =i;
     end

pt =0;
     pm =0;
for j =1:cs
     pt =pt +t(j);
     pm =pm +m(j);
end
     pt =pt /cs
     pm =pm /cs
```

运行 simu2.m,模拟出 100 个工作日平均每日服务顾客数 $pm=43$ 人,每日内顾客的平均等待时间为 27 min.

17.4 用蒙特卡罗法解非线性规划

有约束的非线性规划问题为:

$$\min \quad f(X) \qquad X\in \mathbf{R}^n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(X)\geqslant 0, & i=1,2,\cdots,m \\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

用蒙特卡罗法解非线性规划是一种直接法.其基本思想是:在估计的区域$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_j\in[a_j,b_j],j=1,2,\cdots,n\}$内随机取若干实验点,然后从试验点中找出可行点,再从可行点中选择最小点.

试验点的第 j 个分量 x_j 服从$[a_j,b_j]$内的均匀分布.即:

$$x_j = a_j + R(b_j - a_j), \quad j = 1,2,\cdots,n$$

R 为一个[0,1]均匀分布的随机数. 设:

P:试验点总数;

MAXP:最大试验点总数;

K:可行点总数;

MAXK:最大可行点数;

X^*:迭代产生的最优点;

Q:迭代产生的最小值 $f(X^*)$,其初始值为计算机所能表示的最大数.

先产生一个随机数作为初始试验点. 以后则将上一个试验点的第 j 个分量随机产生,即 $x_j = a_j + R(b_j - a_j)$,其他分量不变而产生一个新的试验点. 这样,每产生一个新试验点只需一个新的随机数分量. 当 $K >$ MAXK 或 $P >$ MAXP 时停止迭代.

迭代步骤见图 17 - 5 框图.

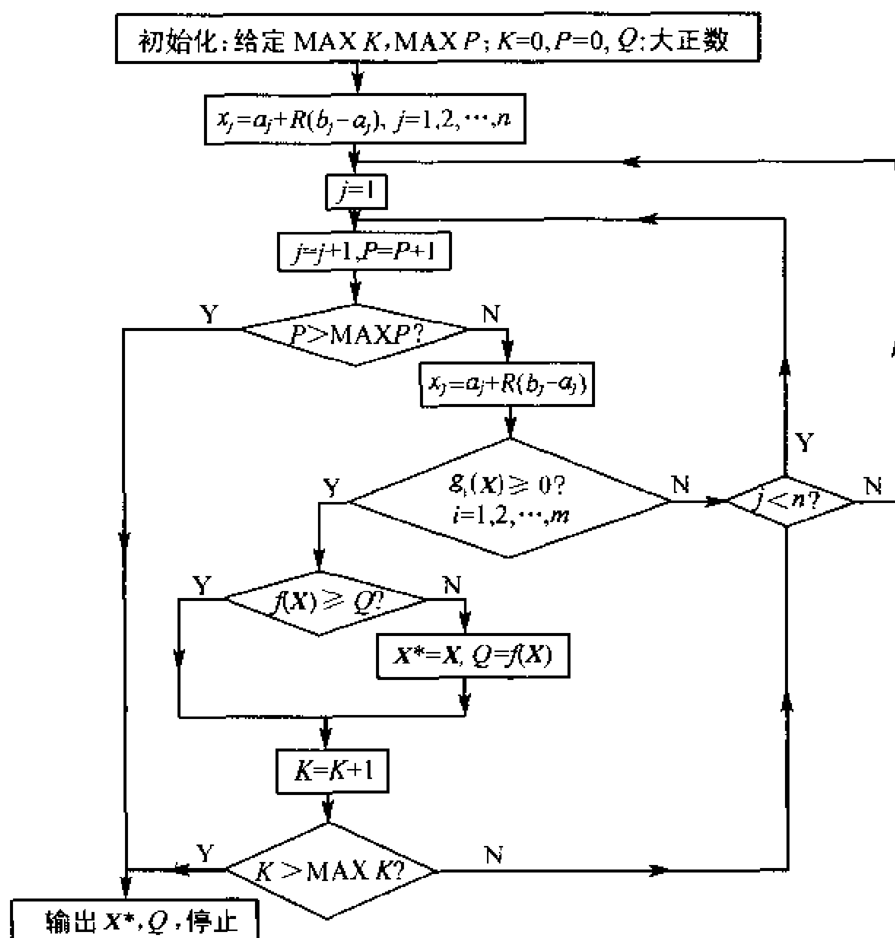


图 17 - 5

例 1　$\max z = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}3x_1+x_2=10\\ x_1>0, x_2>0\end{cases}$$

在 MATLAB 软件包中编程,共需三个 M－文件:randlp.m, mylp.m, lpconst.m.主程序为 randlp.m.各个文件的源程序如下:

```
% randlp.m
function[sol,r1,r2] = randlp(a,b,n)   % 随机模拟解非线性规划
debug = 1;
a = 0;                                % 试验点下界
b = 10;                               % 试验点上界
n = 1000;                             % 试验点个数
r1 = unifrnd(a,b,n,1);                % n×1 阶的[a,b]均匀分布随机数矩阵
r2 = unifrnd(a,b,n,1);
sol = [r1(1) r2(1)];
z0 = inf;
for i = 1:n
    x1 = r1(i);
    x2 = r2(i);
    lpc = lpconst([x1 x2]);
    if lpc = 1
        z = mylp([x1 x2]);
        if z < z0
            z0 = z;
            sol = [x1 x2];
        end
    end
end

% mylp.m
function z = mylp(x)                       % 目标函数
z = 2 * x(1)^2 + x(2)^2 - x(1) * x(2) - 8 * x(1) - 3 * x(2);
                                           % 转化为求最小值问题

% lpconst.m
function lpc = lpconst(x)                  % 约束条件
if 3 * x(1) + x(2) - 10 < = 0.5 & 3 * x(1) + x(2) - 10 > = -0.5
                                           % 约束条件的误差为 ±0.5
    lpc = 1;
else
    lpc = 0;
```

```
end
```

运行 randlp.m,得结果:$x_1=2.5241$,$x_2=2.8397$,$z=15.0735$.

17.5 习 题

1. 已知零件 C 由零件 A 和零件 B 连接而成,已知 A、B 的长度均为随机变量,具体数值如下表. 试抽取 10 个样本以计算 C 的平均长度.

零件 A 的长度	5	6	7	8	9
概率	0.07	0.19	0.38	0.25	0.11

零件 B 的长度	14	15	16	17
概率	0.23	0.41	0.27	0.09

2. 某服装公司欲订购一批冬装出售,每件冬装的加工费用不确切,估计如下:

单件成本	7	8	9	10	11	12
概率	0.05	0.15	0.20	0.30	0.25	0.05

已知该种服装的销售量与定价有关. 当定价为 19、20、21 元时,预测各种销售量数字的概率为:

预计销售 / 概率 / 定价	500	600	700	800	900
19	0.05	0.15	0.40	0.25	0.15
20	0.10	0.20	0.20	0.20	0.10
21	0.20	0.30	0.35	0.10	0.05

试用模拟方法决定该公司冬装的订购数与定价,使利润最大(如订购多于销售数时,每件处理价为 5 元).

3. 某设备上安装有四只型号规格完全相同的电子管,已知电子管寿命为 1000 h ~ 2000 h 之间的均匀分布. 当电子管损坏时有两种维修方案,一是每次更换损坏的那一只;二是当其中一只损坏时四只同时更换. 已知更换时间为换一只时需 1 h,4 只同时换为 2 h. 更换时机器因停止运转每小时的损失为 20 元,又每只电子管价格 10 元,试用模拟方法决定哪一个方案经济合理?

4. 某报童以每份 0.03 元的价格买进报纸,以 0.05 元的价格出售. 根据长期统计,报纸每天的销售量及百分率为

销售量	200	210	220	230	240	250
百分率	0.10	0.20	0.40	0.15	0.10	0.05

已知当天销售不出去的报纸,将以每份 0.02 元的价格退还报社. 试用模拟方法确定报童每天买进报纸数量,使报童的平均总收入为最大?

第 18 章　插值与拟合

在工程中,常有这样的问题:给定一批数据点(它可以是设计师给定,也可能是从测量与采样中得到),需确定满足特定要求的曲线或曲面.如果要求所求曲线(面)通过所给所有数据点,这就是**插值问题**;在数据较少的情况下,这样做能取得较好的效果.但是,如采数据较多,那么,插值函数是一个次数很高的函数,比较复杂,同时,给定的数据一般是由观察测量所得,往往带有随机误差,因而,要求曲线(面)通过所有数据点就既不现实也不必要.如果不要求曲线(面)通过所有数据点,而是要求它反映对象整体的变化趋势,可得到更简单实用的近似函数,这就是**数据拟合**,又称曲线拟合或曲面拟合.函数插值与曲线拟合都是要根据一组数据构造一个函数作为近似,由于近似的要求不同,二者在数学方法上是完全不同的.

18.1　插值问题

18.1.1　拉格朗日插值

若知道函数 $y=f(x)$ 在互异的两个点 x_0 和 x_1 处的函数值 y_0 和 y_1,而想估计该函数在另一点 ξ 处的函数值,最自然的想法是作过点 (x_0,y_0) 和点 (x_1,y_1) 的直线 $y=L_1(x)$,用 $L_1(\xi)$ 作为准确值 $f(\xi)$ 的近似值,如果认为误差太大,还可增加另一点 $f(x)$ 的函数值,即已知 $y=f(x)$ 在互异的三个点 x_0,x_1 和 x_2 处的函数值 y_0,y_1 和 y_2,可以构造一个过这三点的二次曲线 $y=L_2(x)$,用 $L_2(\xi)$ 作为准确值 $f(\xi)$ 的近似值.

一般地,若已知 $y=f(x)$ 在互异的 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,则可以考虑构造一个过 $(x_k,y_k),k=0,1,\cdots,n$ 这 $n+1$ 个点的次数不超过 n 的多项式 $y=L_n(x)$,使其满足

$$L_n(x_k)=y_k,\quad k=0,1,\cdots,n \tag{1}$$

然后用 $L_n(\xi)$ 作为准确值 $f(\xi)$ 的近似值.此方法就叫做**插值法**,这样构造出来的多项式 $L_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的 n **次拉格朗日插值多项式或插值函数**.称点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为**插值结点**,称式(1)为**插值条件(准则)**,含 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的最小区间 $[a,b]$ ($a=\min\limits_{0\le i\le n}\{x_i\},b=\max\limits_{0\le i\le n}\{x_i\}$) 叫做插值区间.

定理 1　满足插值条件(1)的次数不超过 n 的多项式是存在而且唯一的.

1. 线性插值公式

已知函数 $y=f(x)$ 在互异的两个点 x_0 和 x_1 处的函数值 y_0 和 y_1,欲求一个次数不超过 1 的多项式 $y=L_1(x)$,使其满足

$$L_1(x_0)=y_0,\quad L_1(x_1)=y_1 \tag{2}$$

根据定理 1,$L_1(x)$ 是存在而且唯一的.称 $L_1(x)$ 为**线性插值函数或一次插值多项式**.用点斜式可以写出过点 (x_0,y_0) 和点 (x_1,y_1) 的直线方程:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

因此

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

将它写成对称式,为

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{3}$$

我们称(3)式为**拉格朗日线性插值函数**或**一次拉格朗日插值公式**.

若引进记号:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

则(3)式可以写成:

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) \tag{4}$$

其中 $l_0(x)$,$l_1(x)$满足:

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0; \quad l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1$$

我们称 $l_0(x)$,$l_1(x)$为线性插值或一次拉格朗日插值的**基函数**.

例 1 根据下表给出的平方根值,用线性插值计算$\sqrt{5}$.

x	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	1	2	3	4

解 取最接近 $x=5$ 的两点 $x_0=4$,$x_1=9$ 为插值节点,运用插值公式(3),得

$$\sqrt{5} \approx L_1(5) = 2 \times \frac{5-9}{4-9} + 3 \times \frac{5-4}{9-4} = 2.2$$

2. 抛物线插值公式

已知函数 $y=f(x)$在三个互异点 x_0,x_1 和 x_2 处的函数值 y_0,y_1 和 y_2,欲求一个次数不超过 2 的多项式 $y=L_2(x)$,使其满足

$$L_2(x_0) = y_0, \quad L_2(x_1) = y_1, \quad L_2(x_2) = y_2 \tag{5}$$

根据定理 1,$L_2(x)$是存在而且唯一的.下面仿照线性插值时构造插值函数的方法,用基函数的线性组合作出满足(5)的二次插值多项式,此时有三个基函数:$l_0(x)$,$l_1(x)$,$l_2(x)$,它们都是二次函数.分别满足下列条件:

$$\begin{aligned} l_0(x_0) &= 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_0) &= 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_0) &= 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

由上述条件可以推出 $l_0(x)$,$l_1(x)$,$l_2(x)$的表达式.例如:由于 x_1,x_2 是 $l_0(x)$的零点,故 $l_0(x)$必为 $l_0(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$形式,a 为待定系数,又由于 $l_0(x_0)=1$,代入此式解出 $a=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$,从而得到 $l_0(x)$的表达式为:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理可得：

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

根据以上讨论，我们得到二次插值多项式为：

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \tag{7}$$

称 $L_2(x)$ 为**抛物线插值函数或二次插值多项式**.

例 2 根据例 1 的数据，用抛物线法计算$\sqrt{5}$的近似值.

解 选择与 $x=5$ 最接近的三点 $x_0=1, x_1=4, x_2=9$ 为插值节点，根据抛物线插值公式(7)，有

$$\sqrt{5} \approx L_2(5) = 1 \times \frac{(5-4)(5-9)}{(1-4)(1-9)} + 2 \times \frac{(5-1)(5-9)}{(4-1)(4-9)} + 3 \times \frac{(5-1)(5-4)}{(9-1)(9-4)} \approx 2.27$$

3. 一般情形

一般的 n 次插值问题是构造满足条件(1)的次数不超过 n 的多项式. 与构造线性和二次插值多项式类似，**n 次拉格朗日插值公式**可表示成 n 次插值基函数 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 的线性组合

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \tag{8}$$

其中 $l_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 是 n 次多项式，且满足：

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{9}$$

与前面推导类似，可以由(9)式得到 $l_k(x)$ 的具体表达式：

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, k = 0,1,\cdots,n \tag{10}$$

为便于书写，引进记号：

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

取 $w(x)$ 在 $x_k, k=0,1,\cdots,n$ 处的导数，得

$$w'(x_k) = (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

于是**拉格朗日插值公式**可写为：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

4. 插值多项式的余项

本段讨论用 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 来近似函数 $f(x)$ 时的误差. 记

$$r_n(x) = f(x) - L(x)$$

并称 $r_n(x)$ 为 n 次插值多项式的**截断误差**，或称为**插值余项**.

定理 2 假设函数在$[a,b]$上有 $n+1$ 阶导数，且

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n \tag{11}$$

$L(x)$是经过数据点(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$的次数不高于 n 的多项式. 则对区间$[a,b]$上的任何 x 都存在 ξ(ξ 依赖于 x)属于(a,b),使得

$$r_n(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) w(x) \tag{12}$$

其中

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{13}$$

插值公式的余项可以给出多项式 $L(x)$逼近$f(x)$的误差估计.

18.1.2 分段插值

多项式历来都被认为是最好的逼近工具之一. 用多项式作插值函数,就是前面的代数插值. 一般情况下,似乎可以靠增加插值结点的数目来改善插值的精度,但插值多项式的次数会随着节点个数的增加而升高,可能造成插值函数的收敛性和稳定性变差,逼近的效果往往是不理想的,甚至发生龙格振荡现象.

龙格(Runge)在本世纪初发现:在区间$[-1,1]$上用 $n+1$ 个等距结点作插值多项式$L_n(x)$,使得它在结点的值与函数 $y(x)=1/(1+25x^2)$在对应结点的值相等,当 $n\to\infty$ 时,插值多项式 $L_n(x)$在区间的中部趋于 $y(x)$,但是对于满足条件 $0.728\cdots \leqslant |x| < 1$ 的 x,$L_n(x)$并不趋于 $y(x)$在对应点的值. 这种现象就叫做**龙格现象**(图 18-1).

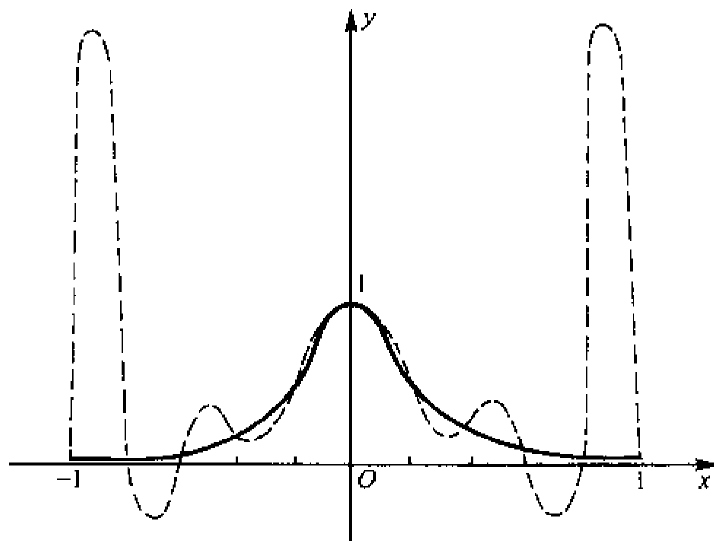


图 18-1 龙格现象

若插值的范围较小(在某个局部),用低次插值往往就能奏效,例如对 $y(x)=1/(1+25x^2)$在每个子段上用线性插值,即用连接相邻节点的折线逼近所考察的曲线,就能保证一定的逼近效果. 这种增加结点,用分段低次多项式插值的化整为零的处理方法称作**分段插值法**,也就是说不是去寻求整个插值区间上的一个高次多项式,而是把插值区间划分成若干个小区间,在每一小区间上用低次多项式进行插值,在整个插值区间上就得到一个分段插值函数. 区间的划分是可任意的,各个区间上插值多项式的次数的选取也可按具体问题选择. 分段插值法通常有较好的收敛性和稳

定性,算法简单,克服了龙格现象,但插值函数不如拉格朗日插值多项式光滑.这类插值大致可分为两类:一类是下面要介绍的局部化的简单分段插值;另一类是非局部化光滑性较好的分段插值,即后面要介绍的样条插值.

在分段插值中,用得较多的是分段线性插值.

设在区间$[a,b]$上取 $n+1$ 个结点:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{14}$$

在区间$[a,b]$上有二阶导数的函数$f(x)$在上列结点的值为

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n \tag{15}$$

于是得到 $n+1$ 个数据点(x_i,y_i).联结相邻两点(x_{i-1},y_{i-1})、(x_i,y_i)得 n 条线段,它们组成一条折线,把区间$[a,b]$上这条折线表示的函数称为函数$f(x)$关于这 $n+1$ 个数据点的**分段插值函数**,记为 $L(x)$.它有如下性质:

(1) $L(x)$可以用分段函数表示,$L(x_i)=f(x_i)=y_i$,在区间$[a,b]$上 $L(x)$连续.

(2) $L(x)$在第 i 段区间$[x_{i-1},x_i]$上的表达式为:

$$L(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}y_i, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \tag{16}$$

由此构造插值基函数:

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i,x_{i+1}], \quad i = 0,1,\cdots,n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot y_i \tag{17}$$

对分段线性插值的余项估计有下列结果:

定理 3 设给定结点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,$f(x_i)=y_i$,$f''(x)$在$[a,b]$上存在,则对任意的 $x\in[a,b]$,有

$$|r(x)| = |f(x) - L(x)| \leqslant \frac{h^2 M_2}{8}$$

其中

$$h = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i - x_{i-1}|\}, \quad M_2 = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}$$

18.1.3 三次样条插值

分段线性插值函数在结点的一阶导数一般不存在,光滑性不高,这就导致了样条插值的提出.

在机械制造、航海、航空工业中,经常要解决下列问题:已知一些数据点(x_0,y_0),(x_1,y_1),

$\cdots,(x_n,y_n)$，如何通过这些数据点作一条比较光滑（如二阶导数连续）的曲线呢？

绘图员解决这一问题是首先把数据点描绘在平面上，再把一根富有弹性的细直条（称为样条）弯曲，使其一边通过这些数据点，用压铁固定细直条的形状，沿样条边沿绘出一条光滑的曲线．往往要用几根样条，分段完成上述工作，这时应当让连接点也保持光滑．对绘图员用样条画出的曲线，进行数学模拟，这样就导出了样条函数的概念．

1．样条函数的定义

设在区间$[a,b]$上，已给 $n+1$ 个互不相同的结点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b \tag{18}$$

面函数 $y=f(x)$ 在这些结点的值 $f(x_i)=y_i$. $i=0,1,\cdots,n$. 如果分段表示的函数 $S(x)$ 满足下列条件，就称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在基点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ **的三次样条插值函数**，简称**三次样条**．

（1）$S(x)$ 在子区间$[x_i,x_{i+1}]$的表达式 $S_i(x)$ 都是次数不高于 3 的多项式；

（2）$S_i(x)=y_i$；

（3）$S(x)$ 在整个区间$[a,b]$上有连续的二阶导数．

在区间$[x_k,x_{k+1}]$上，$S(x)$是不超过三次的多项式，故 $S''(x)$ 是线性函数，令

$$m_k=S''(x_k),\quad k=0,1,\cdots,n \tag{19}$$

由拉格朗日线性插值公式，得

$$S''(x)=m_k\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+m_{k+1}\frac{x-x_k}{h_k} \tag{20}$$

其中，

$$h_k=x_{k+1}-x_k,\quad k=0,1,\cdots,n$$

由(20)得

$$S'''(x)=\frac{m_{k+1}-m_k}{h_k},\quad x\in[x_k,x_{k+1}] \tag{21}$$

由于 $S(x)$ 满足插值原则，并且在全区间有直到二阶的连续导数，又由(21)知 $S'''(x)$ 在$[x_k,x_{k+1}]$上存在且为常数，所以由泰勒公式有：

$$S(x)=y_k+S'(x_k)(x-x_k)+\frac{m_k}{2}(x-x_k)^2+\frac{m_{k+1}-m_k}{6h_k}(x-x_k)^3,$$
$$x\in[x_k,x_{k+1}],k=0,1,\cdots,n-1 \tag{22}$$

将 $x=x_k$ 代入(22)，可解得

$$S'(x_k)=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k}{6}(2m_k+m_{k+1})^2,\quad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{23}$$

将(23)代入(22)，得到 $S(x)$ 在$[x_k,x_{k+1}]$上的表达式：

$$S(x)=y_k+\left[\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k}{6}(2m_k+m_{k+1})\right](x-x_k)$$
$$+\frac{m_k}{2}(x-x_k)^2+\frac{m_{k+1}-m_k}{6h_k}(x-x_k)^3 \tag{24}$$

由此可见，只要能求出 $m_k(k=0,1,\cdots,n)$，$S(x)$ 就能完全确定．下面利用 $S'(x)$ 存在且连续的条件推导 $m_k(k=0,1,\cdots,n)$ 应满足的关系式．

在$[x_{k-1},x_k]$上,$S(x)$的表达式成为

$$S(x)=y_{k-1}+\left[\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}-\frac{h_{k-1}}{6}(2m_{k-1}+m_k)\right](x-x_{k-1})+\frac{m_{k-1}}{2}(x-x_{k-1})^2$$
$$+\frac{m_k-m_{k-1}}{6h_{k-1}}(x-x_{k-1})^3$$

由上式容易计算出 $S(x)$在 x_k 的左导数为:

$$S'(x_k-0)=\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}-\frac{h_{k-1}}{6}(2m_k+m_{k-1}) \tag{25}$$

令 $S'(x_k-0)=S'(x_k)$,整理后得到:

$$\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}m_{k-1}+2m_k+\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}m_{k+1}=\frac{6}{h_{k-1}+h_k}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right) \tag{26}$$

再令

$$\mu_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k},\quad 1-\mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k} \tag{27}$$

$$\lambda_k=\frac{6}{h_{k-1}+h_k}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right)=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}] \tag{28}$$

则(26)式可写为

$$(1-\mu_k)m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=\lambda_k,\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{29}$$

即得到含有 $n+1$ 个未知量 $m_0,m_1,\cdots,m_n$ 的 $n-1$ 个方程的方程组. 要确定未知量还需补充两个条件,它们通常在区间$[a,b]$的两端给出,称为**边界条件**. 常用的边界条件有三种:

(1) **m 边值条件**:给定端点处的一阶导数,即

$$S'(x_0)=y_0',\quad S'(x_n)=y_n'$$

(2) **M 边值条件**:给定端点处的二阶导数,即 m_0,m_n 已知. 特别取 $m_0=m_n=0$ 时称为**自然边界条件**,求得的 $S(x)$称为**自然样条函数**.

(3) **周期边值条件**:当 $y=f(x)$是以 $b-a=x_n-x_0$ 为周期的周期函数时,要求 $S(x)$也是周期函数,故端点要满足 $S'(x_0)=S'(x_n)$,$m_0=m_n$.

给出任一种边界条件都可以得到两个独立的方程,将它们与(29)联立就得到 $n+1$ 个方程,解出 $m_0,m_1,\cdots,m_n$ 之后代入(24)便可得到三次样条函数 $S(x)$在各个子区间上的表达式. 以第二种边界条件为例,m_0,m_n 为已知数,于是(29)化为:

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ 1-\mu_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\mu_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & 1-\mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \\ m_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1-(1-\mu_1)m_0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \\ \lambda_{n-1}-\mu_{n-1}m_n \end{bmatrix} \tag{30}$$

三对角方程组(30)的系数矩阵按行严格对角占优,所以它的行列式不等于零,从而方程组(9)的解存在并且唯一,可用追赶法求解.

2. 计算步骤

三次样条函数的计算步骤如下:

(1) 由(27)、(28)计算 $\mu_k, \lambda_k, k=1,2,\cdots,n-1$;

(2) 由方程组(29)结合给定的边界条件求出确定 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 的方程组,并求解;

(3) 将 $m_i(i=0,1,\cdots,n)$ 代入(24),得到 $S(x)$ 的分段表达式.

以上三种插值方法都是一维插值,它们有如下特点:拉格朗日插值(高次多项式插值),其插值函数在整个区间上是一个解析表达式,便于再次开发利用;曲线光滑;误差估计有表达式;收敛性不能保证(振荡现象). 用于理论分析,实际意义不大. 分段线性和三次样条插值(低次多项式插值):曲线不光滑(三次样条插值已大有改进);误差估计较难(对三次样条插值);收敛性有保证. 简单实用,应用广泛.

18.1.4　二维插值

二维插值是基于一维插值同样的思想. 但它是对两个变量的函数 $z=f(x,y)$ 进行插值.

求解二维插值的基本思路是:构造一个二元函数 $z=f(x,y)$,通过全部已知节点,即 $f(x_i,y_j)=z_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$ 或 $f(x_i,y_i)=z_i(i=0,1,\cdots,n)$,再利用 $f(x,y)$ 插值,即 $z^*=f(x^*,y^*)$.

二维插值常见的可分为两种:网格节点插值和散乱数据插值.

网格节点插值适用于数据点比较规范,即在所给数据点范围内,数据点要落在由一些平行的直线组成的矩形网格的每个顶点上. 散乱数据插值适用于一般的数据点,多用于数据点不太规范的情况.

1. 网格节点插值法

已知 $m\times n$ 个节点 $(x_i,y_j,z_{ij})(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,其中 x_i,y_j 互不相同,不妨设 $a=x_1<x_2<\cdots<x_m=b, c=y_1<y_2<\cdots<y_n=d$,求任一插值点 $(x^*,y^*)(\neq(x_i,y_j))$ 处的插值 z^*.

网格节点插值有以下几种形式:

(1) 最邻近点插值

二维或高维情形的最邻近插值,与被插值点最邻近的节点的函数值即为所求. 注意:最邻近插值一般不连续. 具有连续性的最简单的插值是分片线性插值. 见图 18-2(a).

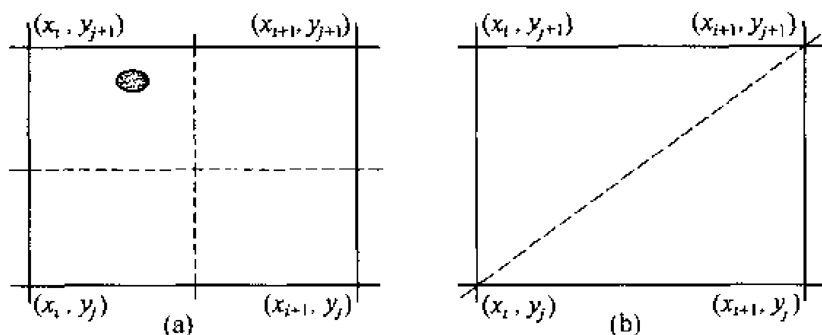


图 18-2

(2) 分片线性插值

将四个插值点(矩形的四个顶点)处的函数值依次简记为:

$$f(x_i,y_j)=f_1,\ f(x_{i+1},y_j)=f_2,\ f(x_{i+1},y_{j+1})=f_3,\ f(x_i,y_{j+1})=f_4$$

分两片的函数表达式如下：

第一片（下三角形区域）：$(x,\ y)$满足：

$$y \leqslant \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_j$$

插值函数为：

$$f(x,y) = f_1 + (f_2 - f_1)(x - x_i) + (f_3 - f_2)(y - y_j)$$

第二片（上三角形区域）：$(x,\ y)$满足：

$$y > \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_j$$

插值函数为：

$$f(x,y) = f_1 + (f_4 - f_1)(y - y_j) + (f_3 - f_4)(x - x_i)$$

见图 18－2(b).

注意：(x,y)当然应该是在插值节点所形成的矩形区域内. 显然，分片线性插值函数是连续的.

(3)双线性插值

双线性插值是由一片一片的空间二次曲面构成. 双线性插值函数的形式如下

$$f(x,y) = Axy + Bx + Cy + D(= (ax + b)(cy + d))$$

其中有四个待定系数，利用该函数在矩形的四个顶点（插值节点）的函数值，得到四个代数方程，正好确定四个系数.

2. 散乱数据据值法

在 $T = [a,b] \times [c,d]$上散乱分布 N 个点 $V_k = (x_k, y_k)$, $k = 1,2,\cdots,N$ 处给出数据 z_k，要求寻找 T 上的二元函数 $F(x,y)$，使

$$f(x_k, y_k) = z_k \quad (k = 1,\cdots,N)$$

一个典型的容易想到的是"反距离加权平均"方法，又称之为 Shepard 方法. 其基本思想是，在非给定数据的点处，定义其函数值由已知数据按与该点距离的远近作加权平均决定，记

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

则二元函数（曲面）定义为：

$$F(x,y) = \begin{cases} z_k, & r_k = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} W_k(x,y) z_k, & \text{否则} \end{cases}$$

其中 $W_k(x,y) = \dfrac{1}{r_k^2} \Big/ \sum\limits_{k=1}^{N} 1/r_k^2$.

如此定义的曲面是全局相关的，对曲面的任一点作数据计算都要涉及全体数据，这在大量实测数据初值中是很慢的. 此外，$F(x,y)$在每个插值点(x_k, y_k)附近产生一个小的"平台"，使曲面不具有光顺性. 但因为这种做法思想简单，人们对它进行了种种改进，例如：

取适当常数 $R > 0$，令

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} 1/\gamma, & 0 < \gamma \leqslant R/3 \\ \dfrac{27}{4R}\left(\dfrac{\gamma}{R} - 1\right)^2, & R/3 < \gamma \leqslant R \\ 0, & \gamma > R \end{cases}$$

由于 $\omega(\gamma)$ 是可微函数，使得如下定义的 $F(x,y)$ 在性能上有所改善：

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{N} W_k(x,y) z_k, \quad W_k(x,y) = \omega(\gamma_k) \Big/ \sum_{k=1}^{N} \omega(\gamma_k)$$

18.2 用 MATLAB 解插值问题

18.2.1 一维插值

MATLAB 在一维插值函数 interp1 中，提供了四种插值方法选择：线性插值、三次样条插值、三次插值和最近邻点插值（linear、spline、cubic、nearest）. Interp1 的基本格式为：

```
Interp1(x,y,cx,'method')
```

其中 x,y 分别表示为数据点的横、纵坐标向量，x 必须单调. cx 为需要插值的横坐标数据（或数组），cx 不能超出 x 的范围.而 method 为可选参数，对应于上述四种方法，可从以下四个值中任选一个：

- 'nearest'——最近邻点插值
- 'linear'——线性插值
- 'spline'——三次样条插值
- 'cubic'——三次插值

'linear'是缺省值.当缺省时按线性插值处理.

例 1 在 12 h 内，每隔 1 h 测量一次温度，温度依次为：5，8，9，15，25，29，31，30，22，25，27，24. 试估计在 3.2 h，6.5 h，7.1 h，11.7 h 时的温度值.

解 输入命令：

```
hours = 1:12;
temps = [5 8 9 15 25 29 31 30 22 25 27 24];
t = interp1(hours,temps,[3.2 6.5 7.1 11.7])              % 线性插值
T = interp1(hours,temps,[3.2 6.5 7.1 11.7],'spline')     % 三次样条插值
```

计算结果：

```
t =
    10.2000   30.0000   30.9000   24.9000
T =
    9.6734   30.0427   31.1755   25.3820
```

比较发现，样条插值与线性插值的结果不同.因为插值是一个估计或猜测的过程，应用不同的估计规则将导致不同的结果.

一个最常用的样条插值是对数据进行平滑.即给定一组数据，使用样条插值在更细的间隔

内求值.

例 2 在例 1 的条件下,每隔$\frac{1}{10}$h 估计一次温度值.

解 由于数据点太多,最好用图形表示. 输入命令:

```
hours =1:12;
temps =[5 8 9 15 25 29 31 30 22 25 27 24];
h =1:0.1:12;
t = interp1(hours,temps,h,'spline');(直接输出数据将是很多的)
plot(hours,temps,'+',h,t,hours,temps,'r:')        % 作图
xlabel('Hour'),ylabel('Degrees Celsius')
```

图形见图 18-3.

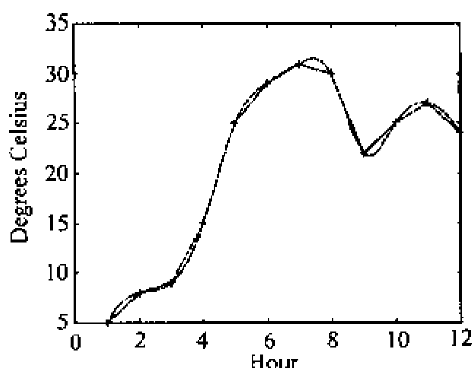


图 18-3

18.2.2 二维插值

对二维插值问题,MATLAB 分别给出了针对插值基点为网格节点的插值函数 interp2,以及针对插值基点为散乱节点的插值函数 griddata. 现分别介绍如下:

1. 插值基点为网格节点

问题:已知 $m \times n$ 个节点:(x_i, y_j, z_{ij}),$(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_m; y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. 求点 (x^*, y^*) $(\neq (x_i, y_j))$ 处的插值 z^*.

对上述问题, MATLAB 中提供了二维插值函数 interp2.其基本格式为:

cz = interp2(x,y,z,cx,cy,'method')

其中向量 x 和 y 是自变量. x、y 的分量值必须是单调递增的.x 是 m 维向量,指明所给数据网格点的横坐标; y 是 n 维向量,指明所给数据网格点的纵坐标; z 是 $m \times n$ 阶矩阵,标明相应于所给数据网格点的函数值.

向量 cx,cy 是给定的网格点的横坐标和纵坐标,指明函数 cz = interp2(x,y,z,cx,cy,'method')返回在网格(cx,cy)处的函数值.cx 与 cy 应是方向不同的向量.即一个是行向量;另一个是列向量.

Method 为可选参数,可从以下四个值中任选一个:

- 'nearest'——最近邻点插值

- 'linear'——线性插值
- 'spline'——三次样条插值
- 'cubic'——三次插值

'linear'是缺省值.

例 3　测得平板表面 5×3 网格点处的温度分别为:

82	81	80	82	84
79	63	61	65	81
84	84	82	85	86

作出平板表面温度分布曲面.

解　(1) 先在三维坐标画出原始数据,看一下该数据的粗糙程度.输入以下命令:

```
x = 1:5;
y = 1:3;
temps = [82 81 80 82 84;79 63 61 65 81;84 84 82 85 86];
mesh(x,y,temps)
```

画出粗糙的温度分布曲面图(图 18-4).

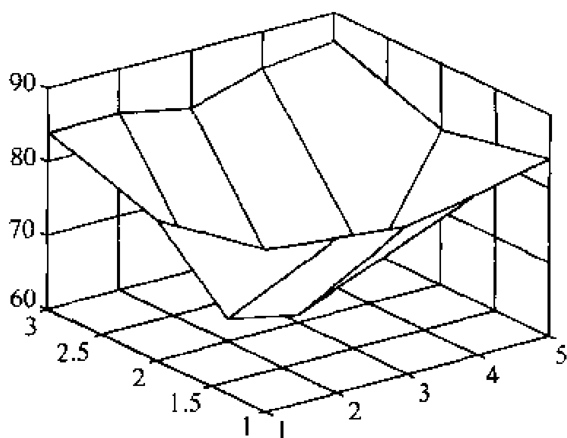


图 18-4　平板温度

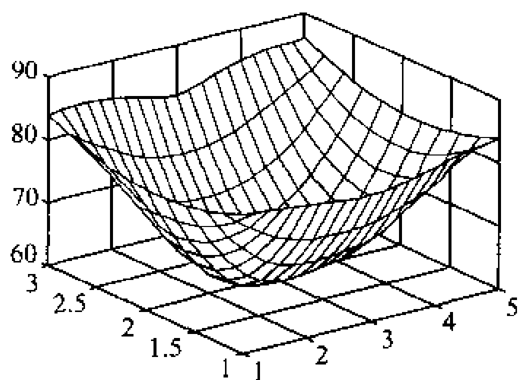


图 18-5　二维插值后的平板温度

(2) 在 x、y 方向上每隔 0.2 个单位的地方进行插值,以平滑数据.再输入以下命令:

```
xi = 1:0.2:5;
yi = 1:0.2:3;
zi = interp2(x,y,temps,xi',yi,'cubic');
mesh(xi,yi,zi)
```

画出插值后的温度分布曲面图见图 18-5.

例 4　山区地貌:在某山区测得一些地点的高度如下表(平面区域 $1\ 200 \leqslant x \leqslant 4\ 000$, $1\ 200 \leqslant y \leqslant 3\ 600$):

y \ x	1 200	1 600	2 000	2 400	2 800	3 200	3 600	4 000
1 200	1 130	1 250	1 280	1 230	1 040	900	500	700
1 600	1 320	1 450	1 420	1 400	1 300	700	900	850
2 000	1 390	1 500	1 500	1 400	900	1 100	1 060	950
2 400	1 500	1 200	1 100	1 350	1 450	1 200	1 150	1 010
2 800	1 500	1 200	1 100	1 550	1 600	1 550	1 380	1 070
3 200	1 500	1 550	1 600	1 550	1 600	1 600	1 600	1 550
3 600	1 480	1 500	1 550	1 510	1 430	1 300	1 200	980

试作出该山区的地貌图和等高线图，并对几种插值方法进行比较.

解 对此例，分别用最近邻点插值、双线性插值方法和双三次插值方法插值后作出该山区的地貌图和等高线图，从而对插值效果进行比较.

编写 M 文件 moutain.m 如下：

```
% 输入原始数据
    x =0 :400 :5600;
    y =0 :400 :4800;
    z =[370 470 550 600 670 690 670 620 580 450 400 300 100 150 250;…
      510 620 730 800 850 870 850 780 720 650 500 200 300 350 320;…
      650 760 880 970 1020 1050 1020 830 900 700 300 500 550 480 350;…
      740 880 1080 1130 1250 1280 1230 1040 900 500 700 780 750 650 550;…
      830 980 1180 1320 1450 1420 1400 1300 700 900 850 840 380 780 750;…
      880 1060 1230 1390 1500 1500 1400 900 1100 1060 950 870 900 930 950;…
      910 1090 1270 1500 1200 1100 1350 1450 1200 1150 1010 880 1000
      1050 1100;…
      950 1190 1370 1500 1200 1100 1550 1600 1550 1380 1070 900 1050 1150
      1200;…
      1430 1430 1460 1500 1550 1600 1550 1600 1600 1600 1550 1500 1500 1550
      1550;…
      1420 1430 1450 1480 1500 1550 1510 1430 1300 1200 980 850 750 550 500;…
      1380 1410 1430 1450 1470 1320 1280 1200 1080 940 780 620 460 370 350;…
      1370 1390 1410 1430 1440 1140 1110 1050 950 820 690 540 380 300 210;…
      1350 1370 1390 1400 1410 960 940 880 800 690 570 430 290 210 150];
% 用原始数据作山区表面图
    figure(1);
    meshz(x,y,z)
    xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
% 每间隔 50 加密网格，分别作最近邻点插值、双线性插值和双三次插值，作出插值后的
```

表面图：

```
xi =0:50:5600;
yi =0:50:4800;

figure(2)
z1i =interp2(x,y,z,xi,yi','nearest');
surfc(xi,yi,z1i)
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')

figure(3)
z2i =interp2(x,y,z,xi,yi');
surfc(xi,yi,z2i)
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')

figure(4)
z3i =interp2(x,y,z,xi,yi','cubic');
surfc(xi,yi,z3i)
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
% 分别作出以上三种插值后的等高线图
figure(5)
subplot(1,3,1),contour(xi,yi,z1i,10,'r');
subplot(1,3,2),contour(xi,yi,z2i,10,'r');
subplot(1,3,3),contour(xi,yi,z3i,10,'r');
```

所得图形见图 18 -6 ~ 图 18 - 10。

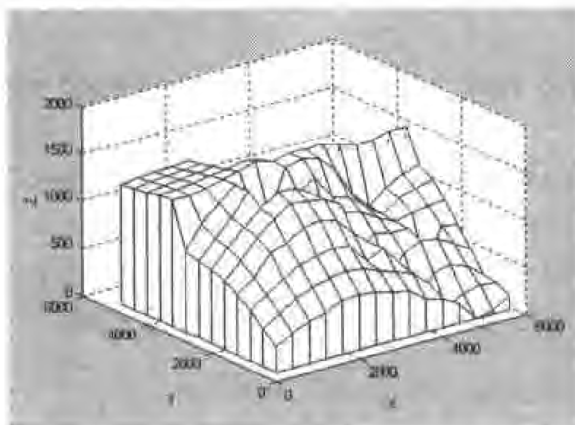


图 18 -6　原始数据山区表面图

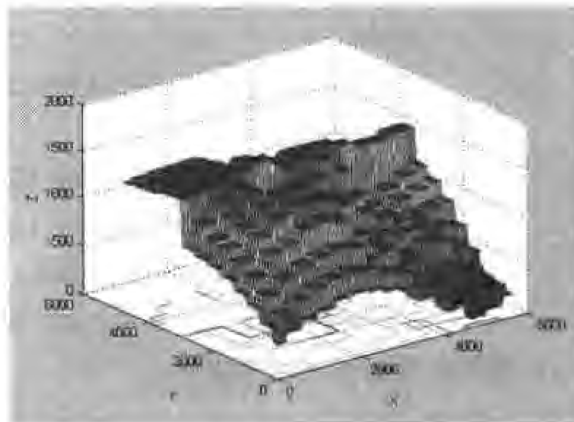


图 18 -7　最近邻点插值山区表面图

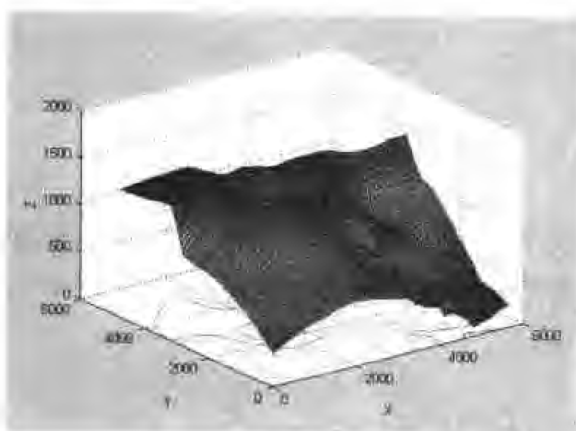


图 18－8　双线性插值山区表面图

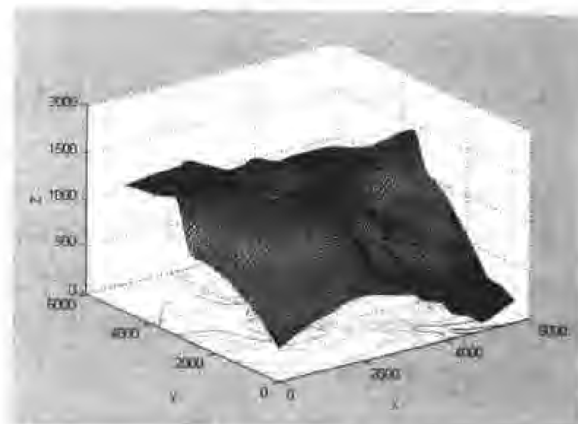


图 18－9　双三次插值山区表面图

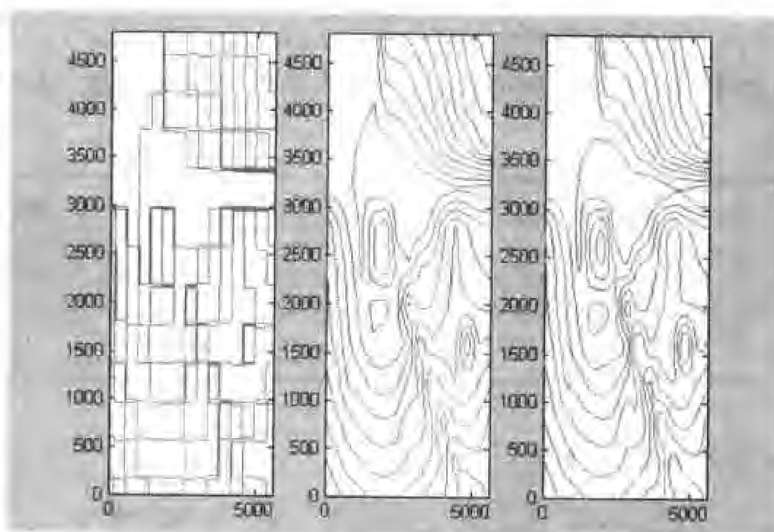


图 18－10　三种插值法的等高线图

从以上图形可以比较出三种插值法的效果.

2. 插值基点为散乱节点

问题：已知 n 个节点：(x_i, y_i, z_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，求点 (x^*, y^*) $(\neq (x_i, y_i))$ 处的插值 z^*.

对上述问题，MATLAB 中提供了插值函数 griddata，其格式为：

```
cz = griddata(x,y,z,cx,cy,'method')
```

其中 x、y、z 均是 n 维向量，指明所给数据点的横坐标、纵坐标和竖坐标. 向量 cx，cy 是给定的网格点的横坐标和纵坐标，指明函数 cz = griddata(x,y,z,cx,cy,'method') 返回在网格 (cx,cy) 处的函数值. cx 与 cy 应是方向不同的向量，即一个是行向量；另一个是列向量.

Method 为可选参数，可从以下四个值中任选一个：

- 'nearest'——最近邻点插值

- 'linear'——线性插值
- 'cubic'——三次插值
- 'v4'——MATLAB 中所提供的插值方法

'linear'是缺省值.

插值函数 e01sef 和 e01sff

针对散乱基点的二维插值问题,MATLAB 还提供了基于修正的 Shepherd 插值法的函数 e01sef 和 e01sff.这两个函数必须同时使用.首先使用 e01sef 求出参数 rnw 和 fnodes,再将它们用于函数 e01sff 中,求得插值点的坐标.

函数的格式如下:

```
[fnodes,minnq,rnw,rnq,ifail] = e01sef(x,y,z)
[cz(i,j),ifail] = e01sff(x,y,z,rnw,fnodes,cx(i),cy(j))
```

其中 x、y、z 均是 n 维向量,指明所给数据点的横坐标、纵坐标和竖坐标. 向量 cx,cy 是给定的网格点的横坐标和纵坐标,cz 是矩阵, 其行数和列数分别等于 cx 和 cy 的维数. 函数 e01sff 求出一个插值点(cx(i),cy(j))所对应的函数值 cz(i,j).

例 5　在某海域测得一些点(x,y)处的水深 z 由下表给出,在矩形区域$(75,200)\times(-50,150)$内画出海底曲面的图形.

x	129	140	103.5	88	185.5	195	105	157.5	107.5	77	81	162	162	117.5
y	7.5	141.5	23	147	22.5	137.5	85.5	-6.5	-81	3	56.5	-66.5	84	-33.5
z	4	8	6	8	6	8	8	9	9	8	8	9	4	9

解　该问题的 M 文件 hd1.m 如下:

```
% 数据输入
    x = [129 140 103.5 88 185.5 195 105.5 157.5 107.5 77 81 162 162 117.5];
    y = [7.5 141.5 23 147 22.5 137.5 85.5
-6.5 -81 3 56.5 -66.5 84 -33.5];
    z = [ -4 -8 -6 -8 -6 -8 -8 -9
-9 -8 -8 -9 -4 -9];
% 插值
    cx = 75:0.5:200;
    cy = -70:0.5:150;
    cz = griddata(x,y,z,cx,cy','cubic');
% 作表面图
    meshz(cx,cy,cz)
```

图 18-11 是插值后作出的海底曲面图.

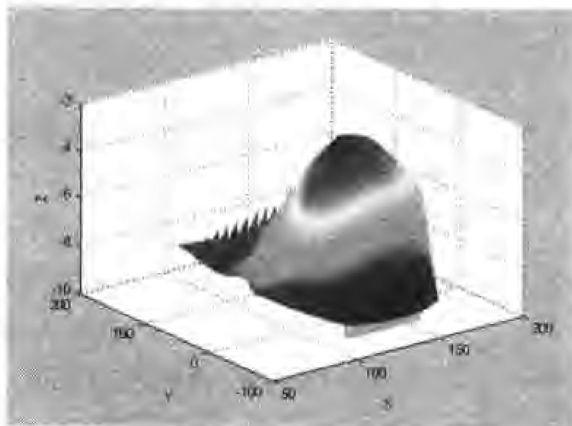


图 18-11

18.3 数据拟合

曲线拟合问题是指：已知平面上 n 个点 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$，x_i 互不相同. 寻求函数 $f(x)$，使 $f(x)$ 在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合得最好.

线性最小二乘法是解决曲线拟合最常用的方法，其基本思路是，令

$$f(x) = a_1 r_1(x) + a_2 r_2(x) + \cdots + a_m r_m(x) \tag{1}$$

其中 $r_k(x)$ 是事先选定的一组函数，a_k 是待定系数 $(k=1,2,\cdots,m,m<n)$. 寻求 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使(2)最小，称为最小二乘准则. 这种拟合方法称为线性最小二乘拟合，其结果为

$$J(a_1,\cdots,a_m) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - y_i]^2 \tag{2}$$

18.3.1 系数 a_k 的确定

为求 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使 J 达到最小，只需利用极值的必要条件 $\frac{\partial J}{\partial a_k}=0(k=1,\cdots,m)$，得到关于 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_1(x_i)\left[\sum_{k=1}^{m} a_k r_k(x_i) - y_i\right] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} r_m(x_i)\left[\sum_{k=1}^{m} a_k r_k(x_i) - y_i\right] = 0 \end{cases}$$

线性最小二乘拟合可由解超定方程：

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{3}$$

来求得. 其中

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_1(x_1) & r_2(x_1) & \cdots & r_m(x_1) \\ r_1(x_2) & r_2(x_2) & \cdots & r_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1(x_n) & r_2(x_2) & \cdots & r_m(x_m) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = (a_1,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

当 $\{r_1(x),\cdots,r_m(x)\}$ 线性无关时，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$ 可逆，方程组(3)有唯一解. 在 MATLAB 中，此解为：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{y}$$

18.3.2 $r_1(x),r_2(x),\cdots,r_m(x)$ 的选取

面对一组数据 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$，用线性最小二乘法作曲线拟合时，关键是恰当地选取 $r_1(x),r_2(x),\cdots,r_m(x)$. 如能通过机理分析，知道 y 与 x 之间应该有什么样的函数关系，则 $r_1(x)$，$r_2(x),\cdots,r_m(x)$ 就容易确定. 若无法知道 y 与 x 之间的关系，通常可以将数据作图，直观地判断应该用什么样的曲线去作拟合，常用的曲线有直线、多项式、双曲线、指数曲线等. 实际操作中可

以在直观判断的基础上,选几种曲线分别作拟合,然后比较,看哪条曲线的最小二乘指标 J 最小.

特别地,若令

$$f(x) = a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots + a_mx + a_{m+1} \tag{4}$$

则线性最小二乘拟合称为多项式拟合.

18.3.3　多项式拟合

假设有已知数据 (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,m)$. 现求作一个不超过 $n(m > n)$ 次的多项式 $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_kx^k$,使得 $\sqrt{\sum_{i=0}^{m}[y_i - \varphi_n(x_i)]^2}$ 取最小,亦即

$$\sum_{i=0}^{m}[y_i - \varphi_n(x_i)]^2 \tag{5}$$

取最小.

不难看出,以上多项式最小二乘拟合问题就是求解关于 $a_k(k=0,1,2,\cdots,m)$ 的超定方程组

$$\sum_{k=0}^{m} a_kx_i^k = y_i \quad (i = 0,1,2,\cdots,m;\ m > n) \tag{6}$$

的最小二乘解问题.

把 a_k 当作变量,上述方程组的矩阵法记为

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

这是一个超定方程组. 根据定理 1,它所对应的正规方程组为

$$\begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \sum_{i=0}^{m} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_iy_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^ny_i \end{bmatrix}$$

记 $S_k = \sum_{i=0}^{m} x_i^k, t_r = \sum_{i=0}^{m} x_i^r y_i (k = 0,1,2,\cdots,2n; r = 0,1,2,\cdots,n)$, 上述方程组可改写为

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_n \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{2n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

通过解正规方程组(7)便可解出 a_k,从而确定出拟合多项式 $\varphi_n(x)$.

多项式拟合的一般方法可归纳为:

(1) 根据具体问题,确定拟合多项式的次数 n;

(2)由公式 $S_k=\sum_{i=0}^{m}x_i^k, t_r=\sum_{i=0}^{m}x_i^r y_i(k=0,1,2,\cdots,2n; r=0,1,2,\cdots,n)$,计算出 S_k 与 t_r;

(3) 写出正规方程组(7)式;

(4) 解正规方程组,求出 $a_k(k=0,1,2,\cdots,m)$;

(5) 写出拟合多项式 $\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k x^k$.

例 1 测得铜导线在温度为 T_i 时的电阻 R_i 如下表,求电阻 R 与温度 T 的关系.

i	0	1	2	3	4	5	6
T_i(℃)	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R_i(Ω)	76.30	77.8	79.25	80.80	82.35	83.90	85.10

解 描点作草图(图 18-12).

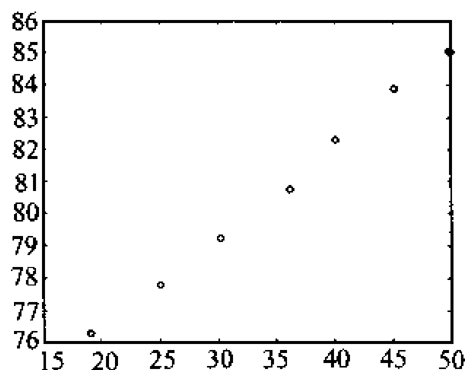


图 18-12

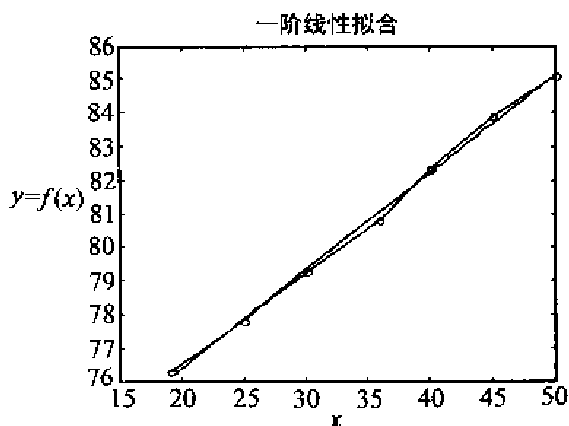


图 18-13

由图 18-13 可见测得的数据接近一条直线,因而可取 $n=1$. 计算 S_k, t_r,可借助于下表:

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
0	19.1	364.81	76.30	1457.33
1	25.0	625.00	77.80	1 945.00
2	30.1	906.01	79.25	2 385.43
3	36.0	1 296.00	80.80	2 908.80
4	40.0	1 600.00	82.35	3 294.00
5	45.1	2 034.01	83.90	3 783.89
6	50.0	2 500.00	85.10	4 255.00
Σ	2 45.3 (S_1)	9 325.83 (S_2)	566.50 (t_0)	20 029.45 (t_1)

S_0 等于节点数据,即 $S_0=7$,所以正规方程组为:

$$\begin{bmatrix} 7 & 245.3 \\ 245.3 & 9\,325.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566.50 \\ 20\,029.445 \end{bmatrix}$$

解方程组，得

$$a_0 = 70.572\,3, \quad a_1 = 0.291\,5$$

故电阻 R 与 T 温度的关系可表示为：

$$R \approx 70.572\,3 + 0.291\,5T$$

所得曲线与原数据的吻合情况如图 18－13 所示（图中直线为拟合曲线 $y = 70.572\,3 + 0.291\,5x$）.

例 2 已知一组实验数据如下表所示，试用最小二乘法求它的二次多项式拟合曲线.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	10	5	4	2	1	1	2	3	4

解 按多项式拟合的一般方法，求出 $S_1, S_2, S_3, S_4, t_0, t_1, t_2$，如下表.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	1	10	1	1	1	10	10
1	3	5	9	27	81	15	45
2	4	4	16	64	256	16	64
3	5	2	25	125	625	10	50
4	6	1	36	216	1 296	6	36
5	7	1	49	343	2 401	7	49
6	8	2	64	512	4 096	16	128
7	9	3	81	729	6 561	27	243
8	10	4	100	1 000	10 000	40	400
$\sum$	53 (S_1)	32 (t_0)	381 (S_2)	3 017 (S_3)	25 317 (S_4)	147 (t_1)	1 025 (t_2)

因节点数为 9，故 $S_0 = 9$，得正规方程组：

$$\begin{bmatrix} 9 & 53 & 381 \\ 53 & 381 & 3\,017 \\ 381 & 3\,017 & 25\,317 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 147 \\ 1\,025 \end{bmatrix}$$

解此方程，得

$$a_0 = 13.459\,7, \quad a_1 = -3.605\,3, \quad a_2 = 0.267\,6$$

故所求拟合多项式为：

$$\varphi_2(x) = 13.459\,7 - 3.605\,3x + 0.267\,6x^2$$

$\varphi_2(x)$ 与原始数据的拟合情况如图 18－14 所示（图中光滑曲线为 $\varphi_2(x)$）.

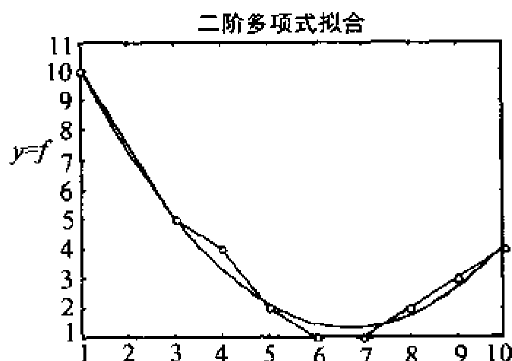


图 18－14

18.4 用 MATLAB 解曲线拟合问题

18.4.1 线性最小二乘拟合

在 MATLAB 的线性最小二乘拟合中，用得较多的是多项式拟合，其命令为：

```
A = polyfit(x,y,m)
```

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_{m+1})$.

多项式在 $\boldsymbol{x}$ 处的值 $\boldsymbol{y}$ 可用以下命令计算：

```
y = polyval(A,x)
```

例 1 对下面一组数据作二次多项式拟合：

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	−0.447	1.978	3.28	6.16	7.08	7.34	7.66	9.56	9.48	9.30	11.2

即要求出二次多项式 $f(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$ 中的 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$，使得 $\sum_{i=1}^{11}[f(x_i)-y_i]^2$ 最小.

解 (1) 用解超定方程的方法. 此时，

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{11}^2 & x_{11} & 1 \end{pmatrix}$$

输入以下命令：

```
x = 0:0.1:1;
y = [ -0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];
R = [(x.^2)' x' ones(11,1)];
A = R\y'
```

计算结果：

```
A =
     -9.8108
    20.1293
     -0.0317
```

(2) 用多项式拟合的命令

输入以下命令:

```
x = 0:0.1:1;
y = [ -0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];
A = polyfit(x,y,2)
z = polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r')          % 作出数据点和拟合曲线的图形
```

计算结果:

```
A =
     -9.8108
    20.1293
     -0.0317
```

见图 18 - 15.

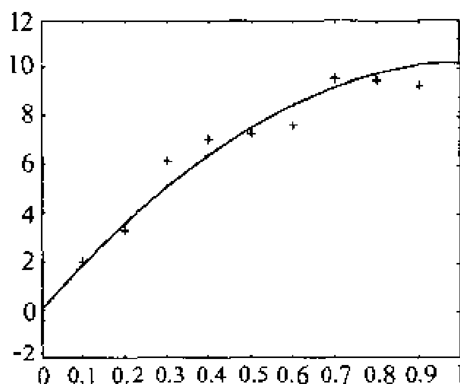


图 18 - 15

18.4.2 非线性最小二乘拟合

在最小二乘拟合中,若要寻求的函数 $f(x)$ 是任意的非线性函数,则称为非线性最小二乘拟合.MATLAB 6.3 的优化工具箱中提供了两个求非线性最小二乘拟合的函数:lsqcurvefit 和 lsqnonlin.使用这两个命令时,都要先建立 M - 文件 fun.m,在其中定义函数 $f(x)$,但它们定义 $f(x)$ 的方式是不同的.

1. lsqcurvefit

设已知 $xdata = (xdata_1, xdata_2, \cdots, xdata_n)$, $ydata = (ydata_1, ydata_2, \cdots, ydata_n)$,lsqcurvefit 用以求含参量 $\boldsymbol{x}$(向量)的向量值函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, xdata) = (F(\boldsymbol{x}, xdata_1), \cdots, F(\boldsymbol{x}, xdata_n))^{\mathrm{T}}$$

中的参变量 $\boldsymbol{x}$(向量),使得

$$\sum_{i=1}^{n}(F(\boldsymbol{x}, xdata_i) - ydata_i)^2 \quad 最小$$

输入格式为:

```
1) x = lsqcurvefit('fun',x0,xdata,ydata);
2) x = lsqcurvefit('fun',x0,xdata,ydata,options);
3) x = lsqcurvefit('fun',x0,xdata,ydata,options,'grad');
4) [x, options] = lsqcurvefit('fun',x0,xdata,ydata,…);
5) [x, options,funval] = lsqcurvefit ('fun',x0,xdata,ydata,…);
6) [x, options,funval, Jacob] = lsqcurvefit ('fun',x0,xdata,ydata,…);
```

输出目标函数值格式:

```
f = fun (x,xdata)
```

其中 x0 为迭代的初值,options 见第 5 章表 5－1.

注:lsqcurvefit 对应着 MATLAB 5.3 中的函数 curvefit.目前 curvefit 在 MATLAB6.3 中暂时还能使用,但将来会移去.

2. lsqnonlin

设已知 $xdata = (xdata_1, xdata_2, \cdots, xdata_n)$, $ydata = (ydata_1, ydata_2, \cdots, ydata_n)$, lsqnonlin 用以求含参量 $\boldsymbol{x}$(向量)的向量值函数.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))^T$ 中的参量 $\boldsymbol{x}$,使得

$$\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = f_1^2(\boldsymbol{x}) + f_2^2(\boldsymbol{x}) + \cdots + f_n^2(\boldsymbol{x}) \quad 最小$$

其中 $f_i(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, xdata_i, ydata_i) = F(\boldsymbol{x}, xdata_i) - ydata_i$

输入格式为

```
1) x = lsqnonlin('fun',x0);
2) x = lsqnonlin('fun',x0,options);
3) x = lsqnonlin('fun',x0,options,'grad');
4)[x,options] = lsqnonlin('fun',x0,…);
5) [x,options,funval] = lsqnonlin('fun',x0,…);
```

注:lsqnonlin 对应着 MATLAB 5.3 中的函数 leastsq.目前 leastsq 在 MATLAB 6.3 中暂时还能使用,但将来会移去.

例 2 用下面一组数据拟合函数 $c(t) = a + be^{0.02kt}$ 中的参数 a, b, k.

t_j	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$C_j \times 10^3$	4.54	4.99	5.35	5.65	5.90	6.10	6.26	6.39	6.50	6.59

解 该问题即解最优化问题:

$$\min F(a,b,k) = \sum_{j=1}^{10}[a + be^{-0.02kt_j} - c_j]^2$$

(1) 用命令 lsqcurvefit.此时

$$F(x,tdata) = (a + be^{-0.02kt_1},\cdots,a + be^{-0.02kt_{10}})^T, x = (a,b,k)$$

1) 编写 M 文件 curvefun1.m

```
function f = curvefun1(x,tdata)
f = x(1) + x(2) * exp( -0.02 * x(3) * tdata) % 其中 x(1) = a; x(2) = b;x(3) = k;
```

2) 主程序 fzxec1.m 如下:

```
tdata = 100:100:1000
cdata = 1e - 03 * [4.54,4.99,5.35,5.65,5.90,6.10,6.26,6.39,6.50,
6.59];
x0 = [0.2,0.05,0.05];
x = lsqcurvefit('curvefun1',x0,tdata,cdata)
f = curvefun1(x,tdata)
```

3) 运行主程序,得结果为:

```
f =
Columns 1 through 6
  0.0043   0.0051   0.0056   0.0059   0.0061   0.0062
Columns 7 through 10
  0.0062    0.0063   0.0063   0.0063
x = 0.0063   -0.0034   0.2542
```

即拟合得 $a = 0.0063$, $b = -0.0034$, $k = 0.2542$

(2) 用命令 lsqnonlin.此时

$$f(x) = f(x,tdata,cdada) = (a + be^{-0.02kt_1} - c_1,\cdots,a + be^{-0.02kt_{10}} - c_{10})^T$$

$$x = (a,b,k)$$

1) 编写 M 文件 curvefun2.m

```
function f = curvefun2(x)
tdata = 100:100:1000;
cdata = 1e - 03 * [4.54,4.99,5.35,5.65,5.90,6.10,6.26,6.39,6.50,6.59];
f = cdata - x(1) - x(2) * exp( -0.02 * x(3) * tdata)
```

2) 主程序 fzxec2.m 如下:

```
x0 - [0.2,0.05,0.05];
x = lsqnonlin('curvefun2',x0)
f = curvefun2(x)
```

3) 运行主程序得结果为:

```
f =
  1.0e - 003  *
Columns 1 through 6
  0.2322   -0.1243   -0.2495   -0.2413   -0.1668   -0.0724
Columns 7 through 10
  0.0241    0.1159   0.2030   0.2792
```

```
x =0.0063   -0.0034   0.2542
```

可以看出，两个命令的计算结果是相同的.

请通过此例体会 lsqcurfit 和 lsqnonlin 两个函数作曲线拟合时，用 M 文件定义函数方法的不同之处. 函数 curvefun2 的自变量是 x，*cdata* 和 *tdata* 是已知参数，故应将 *cdata* 和 *tdata* 的值写在 curvefun2.m 中.

例 3 给药方案制定问题[31]：一种新药用于临床之前，必须设计给药方案. 在快速静脉注射的给药方式下，所谓给药方案是指：每次注射计量多大，间隔时间多长.

药物进入机体后血液输送到全身，在这个过程中不断地被吸收、分布、代谢，最终排出体外，药物在血液中的浓度，即单位体积血液中的药物含量，称为血药浓度. 在最简单的一室模型中，将整个机体看作一个房室，称中心室，室内血药浓度是均匀的. 快速静脉注射后，浓度立即上升；然后迅速下降. 当浓度太低时，达不到预期的治疗效果；当浓度太高，又可能导致药物中毒或副作用太强. 临床上，每种药物有一个最小有效浓度 c_1 和一个最大有效浓度 c_2. 设计给药方案时，要使血药浓度保持在 $c_1 \sim c_2$ 之间. 本题设 $c_1 = 10\ \mu g/ml$，$c_2 = 25\ \mu g/ml$.

通过实验，对某人用快速静脉注射方式一次注入该药物 300 mg 后，在一定时刻 t(h) 采集血药，测得血药浓度 c($\mu g/ml$) 如下表：

t	0.25	0.5	1	1.5	2	3	4	6	8
c	19.21	18.15	15.36	14.10	12.89	9.32	7.45	5.24	3.01

解 问题分析：要设计给药方案，必须知道给药后血药浓度随时间变化的规律.

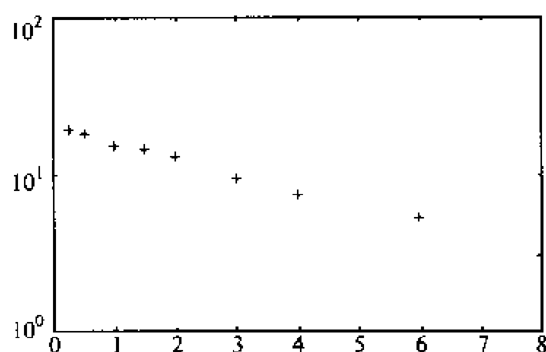


图 18－16

在半对数坐标中做出 t 与 c 的关系图见图 18－16. 此图说明血药浓度数据符合负指数变化规律.

(1) 求血药浓度变化规律

假设：

[1] 机体看作一个房室，室内血药浓度均匀——一室模型.

[2] 药物排除速率与血药浓度成正比，比例系数 $k(>0)$.

[3] 血液容积为 v，$t=0$ 时注射剂量为 d，则 $t=0$ 血药浓度为 d/v.

由假设[2]得：

$$\frac{dc}{dt} = -kc$$

由假设[3]得：

$$c(0) = d/v$$

解微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = -kc \\ c(0) = d/v \end{cases}$$

得

$$c(t) = \frac{d}{v}e^{-kt}$$

在此，$d = 300$ mg，t 及 $c(t)$ 在某些点处的值见前表，下面通过拟合求出参数 k、v。

方法一　用线性最小二乘拟合

1）先将非线性函数转化为线性函数：

$$\left.\begin{aligned} c(t) &= \frac{d}{v}e^{-kt} \Rightarrow \ln c = \ln(d/v) - kt \\ y &= \ln c, a_1 = -k, a_2 = \ln(d/v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &y = a_1 t + a_2 \\ &k = -a_1, v = d/e^{a_2} \end{aligned}$$

2）再编写 M 文件 lihe1.m 如下：

```
d=300;
t=[0.25 0.5 1 1.5 2 3 4 6 8];
c=[19.21 18.15 15.36 14.10 12.89 9.32 7.45 5.24 3.01];
y=log(c);
a=polyfit(t,y,1)
k= -a(1)
v=d/exp(a(2))
```

计算得结果：$k = 0.2347(1/h)$，$v = 15.02(L)$。

方法二　用非线性最小二乘拟合 $c(t)$——用 lsqcurvefit 函数

1）先用 M 文件 curvefun3.m 定义函数

```
function f=curvefun3(x,tdata)
d=300
f=(x(1)\d)*exp(-x(2)*tdata)
% x(1)=v;x(2)=k
```

2）再编写主程序 lihe2.m 如下

```
clear
tdata=[0.25 0.5 1 1.5 2 3 4 6 8];
cdata=[19.21 18.15 15.36 14.10 12.89 9.32 7.45 5.24 3.01];
x0=[10,0.5];
x=lsqcurvefit('curvefun3',x0,tdata,cdata);
f=curvefun3(x,tdata)
```

x

计算得结果;$k=0.2420(1/h)$,$v=14.8212(L)$.

两种方法拟合所得结果很接近.

(2) 制定给药方案

假设:

[1] 设每次注射剂量 D, 间隔时间.

[2] 血药浓度 $c(t)$ 应 $c_1 \leqslant c(t) \leqslant c_2$.

[3] 初次剂量 D_0 应加大.

给药方案记为:$\{D_0, D, \tau\}$,则:

1) $D_0 = vc_2, D = v(c_2 - c_1)$

2) $c_1 = c_2 e^{-k\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{k}\ln\frac{c_2}{c_1}$

将 $c_1=10, c_2=25, k=0.2347, v=15.02$ 代入(1)、(2)计算得:

$$D_0 = 375.5, D = 225.3, \tau = 3.9$$

故可制定给药方案:

$$D_0 = 375 \text{ mg}, D = 225 \text{ mg}, \tau = 4 \text{ h}$$

即首次注射 375 mg,其余每次注射 225 mg,注射的间隔时间为 4h.

18.5 建模案例:水塔流量的估计

18.5.1 问题的提出

某居民区有一供居民用水的圆柱形水塔,一般可以通过测量其水位来估计水的流量.但面临的困难是,当水塔水位下降到设定的最低水位时,水泵自动启动向水塔供水,到设定的最高水位时停止供水,这段时间无法测量水塔的水位和水泵的供水量.通常水泵每天供水一两次,每次约 2 h.

水塔是一个高为 12.2 m,直径为 17.4 m 的正圆柱.按照设计,水塔水位降至约 8.2 m 时,水泵自动启动,水位升到约 10.8 m 时水泵停止工作.

表 18-1 是某一天的水位测量记录(符号“//”表示水泵启动),试估计任何时刻(包括水泵正供水时)从水塔流出的水流量,及一天的总用水量.

表 18-1 水位测量记录

时刻(h)	0	0.92	1.84	2.95	3.87	4.98	5.90	7.01	7.93	8.97
水位(cm)	968	948	931	913	898	881	869	852	839	822
时刻(h)	9.98	10.92	10.95	12.03	12.95	13.88	14.98	15.90	16.83	17.93
水位(cm)	//	//	1 082	1 050	1 021	994	965	941	918	892
时刻(h)	19.04	19.96	20.84	22.01	22.96	23.88	24.99	25.91		
水位(cm)	866	843	822	//	//	1 059	1 035	1 018		

18.5.2 问题的分析

流量是单位时间流出的水的体积，由于水塔是正圆柱形，横截面积是常数，在水泵不工作的时段，流量很容易从水位对时间的变化率算出，问题是如何估计水泵供水时段的流量.

水泵供水时段的流量只能靠供水时段前后的流量拟合得到，作为用于拟合的原始数据，我们希望水泵不工作的时段的流量越准确越好. 这些流量大体上可由两种方法计算，一是直接对表 18－1 中的水位用数值微分算出各时段的流量，用它们拟合其他时刻或连续时间的流量；二是先用表中数据拟合水位～时间函数，求导数即可得到连续时间的流量. 一般来说数值微分的精度不高，何况测量记录还是不等距的，数值微分的计算尤其麻烦. 下面我们用第二种方法处理.

有了任何时刻的流量，就不难计算一天的总用水量. 其实，水泵不工作时段的用水量可以由测量记录直接得到，如由表 18－1 可知从 $t=0$ 到 $t=8.97$(h)水位下降了 $968-822=146$(cm)，乘以水塔的截面积就是这一时段的用水量. 这个数值可以用来检验拟合的结果.

18.5.3 模型假设

1. 流量只取决于水位差，与水位本身无关. 按照 Torricelli 定律从小孔流出的流体的流速正比于水面高度的平方根，题目给出水塔的最低和最高水位分别是 8.2 m 和 10.8 m(设出口的水位为零)，因为 $\sqrt{10.8/8.2}=1.15\approx1$，所以可忽略水位对流速的影响.

2. 水泵第 1 次供水时段为 $t=9$ 到 $t=11$(h)，第 2 次供水时段为 $t=20.8$ 到 $t=23$(h). 这是根据最低和最高水位分别是 8.2 m 和 10.8 m，及表 18－1 的水位测量记录作出的假设，其中前 3 个时刻直接取自实测数据(精确到 0.1 h)，最后 1 个时刻来自每次供水约两小时的已知条件(从记录看，第 2 次供水时段应在有记录的 22.96 h 之后不久结束).

3. 水泵工作时单位时间的供水量大致是常数，此常数大于单位时间的平均流量.

4. 流量是(对时间的)连续函数.

5. 流量与水泵是否工作无关.

6. 由于水塔截面积是常数 $S=17.4^2\pi/4=237.8(\mathrm{m}^2)$，为简单起见，计算中将流量定义为单位时间流出的水的高度，即水位对时间变化率的绝对值(水位是下降的)，最后给出结果时再乘以 S 即可.

18.5.4 流量估计

1. 拟合水位～时间函数

从表 18－1 测量记录看，一天有两个供水时段(以下称第 1 供水时段和第 2 供水时段)，和 3 个水泵不工作时段(以下称第 1 时段 $t=0$ 到 $t=8.97$，第 2 次时段 $t=10.95$ 到 $t=20.84$ 和第 3 时段 $t=23$ 以后). 对第 1、2 时段的测量数据直接分别作多项式拟合，得到水位函数. 为使拟合曲线比较光滑，多项式次数不要太高，一般在 3～6. 由于第 3 时段只有 3 个测量记录，无法对这一时段的水位作出较好的拟合.

2. 确定流量～时间函数

对于第 1、2 时段只需将水位函数求导数即可，对于两个供水时段的流量，则用供水时段前后(水泵不工作时段)的流量拟合得到，并且将拟合得到的第 2 供水时段流量外推，将第 3 时段流

量包含在第 2 供水时段内.

3. 一天总用水量的估计

总用水量等于两个水泵不工作时段和两个供水时段用水量之和,它们都可以由流量对时间的积分得到.

18.5.5 算法设计与编程

1. 拟合第 1、2 时段的水位,并导出流量

设 t,h 为已输入的时刻和水位测量记录(水泵启动的 4 个时刻不输入),第 1 时段各时刻的流量可由如下程序代码得到:

```
c1 =polyfit(t(1:10),h(1:10),3);
                        % 用 3 次多项式拟合第 1 时段水位,c1 输出 3 次多项式的系数
a1 =polyder(c1);                 % a1 输出多项式(系数为 c1)导数的系数
tp1 =0:0.1:9;
x1 = -polyval(a1,tp1);
        % x1 输出多项式(系数为 a1)在 tp1 点的函数值(取负后变为正值),即 tp1 时刻的流量
```

类似地,可计算第 2 时段各时刻的流量.

2. 拟合供水时段的流量

在第 1 供水时段($t=9\sim11$)之前(即第 1 时段)和之后(即第 2 时段)各取几点,其流量已经得到,用它们拟合第 1 供水时段的流量. 为使流量函数在 $t=9$ 和 $t=11$ 连续,我们简单地只取 4 个点,拟合 3 次多项式(即曲线必过这 4 个点),实现如下:

```
xx1 = -polyval(a1,[8 9]);             % 取第 1 时段在 t =8,9 的流量
xx2 = -polyval(a2,[11 12]);           % 取第 2 时段在 t =11,12 的流量
xx12 =[xx1 xx2];
c12 =polyfit([8 9 11 12],xx12,3);     % 拟合 3 次多项式
tp12 =9:0.1:11;
x12 =polyval(c12,tp12);               % x12 输出第 1 供水时段各时刻的流量
```

在第 2 供水时段之前取 $t=20,20.8$ 两点的流水量,在该时刻之后(第 3 时段)仅有 3 个水位记录,我们用差分得到流量,然后用这 4 个数值拟合第 2 供水时段的流量如下:

```
dt3 =diff(t(22:24));                  % 最后 3 个时刻的两两之差
dh3 =diff(h(22:24));                  % 最后 3 个水位的两两之差
dht3 = -dh3./dt3;                     % t(22)和 t(23)的流量
t3 =[20 20.8 t(22) t(23)];
xx3 =[ -polyval(a2,t3(1:2)),dht3)];   % 取 t3 各时刻的流量
c3 =polyfit(t3,xx3,3);                % 拟合 3 次多项式
t3 =20.8:0.1:24;
x3 =polyval(c3,tp3);                  % x3 输出第 2 供水时段(外推至 t =24)各时刻的流
                                        量
```

3. 一天总用水量的估计

第 1、2 时段和第 1、2 供水时段流量的积分之和,就是一天总用水量. 虽然诸时段的流量已表为多

项式函数,积分可以解析地算出,这里仍用数值积分计算如下:

```
y1 =0.1 * trapz(x1);                  % 第 1 时段用水量(仍按高度计),0.1 为积分步长
y2 =0.1 * trapz(x2);                  % 第 2 时段用水量
y12 =0.1 * trapz(x12);                % 第 1 供水时段用水量
y3 =0.1 * trapz(x3);                  % 第 2 供水时段用水量
y =(y1 +y2 +y12 +y3) * 237.8 * 0.01;  % 一天总用水量
```

4. 流量及总用水量的检验

计算出的各时刻的流量可用水位记录的数值微分来检验. 用水量 y_1 可用第 1 时段水位测量记录中下降高度 968 − 822 = 146 来检验,类似地,y_2 用 1 082 − 822 = 260 检验.

供水时段流量的一种检验方法如下:供水时段的用水量加上水位上升值 260 是该时段泵入的水量,除以时段长度得到水泵的功率(单位时间泵入的水量),而两个供水时段水泵的功率应大致相等. 第 1、2 时段水泵的功率可计算如下:

```
p1 =(y12 +260)/2;                     % 第 1 供水时段水泵的功率(水量仍以高度计)
tp2 =20.8:0.1:23;
xp2 =polyval(c3,tp2);                 % xp2 输出第 2 供水时段各时刻的流量
p2 =(0.1 * trapz(x3) +260)/2.2;       % 第 2 供水时段水泵的功率(水量仍以高度计)
```

18.5.6 计算结果

从上面的分析和算法设计过程看,计算结果与各时段所用拟合的多项式的次数有关,下面只给出拟合第 1、2 时段水位函数时,采用不同次数的多项式所得流量及总用水量的结果. 用 $n=(n_1,n_2)$ 表示这两个时段所用多项式的次数,图 18 − 17 和图 18 − 18 是拟合得到的流量曲线,图中 · 表示对水位测量记录用数值微分得到的流量,表 18 − 2 是各时段的用水量、一天总用水量及两个供水时段水泵的功率.

表 18 − 2 各时段和一天总用水量及两个供水时段水泵的功率

(n_1,n_2)	y_1	y_2	y_{12}	y_3	y	p_1	p_2
(3,4)	146.181 5	258.098 5	48.500 4	78.508 3	1 263.4	154.252 2	143.588 3
(5,6)	146.515 0	257.760 5	46.131 7	76.307 6	1 252.5	153.065 9	142.669 2

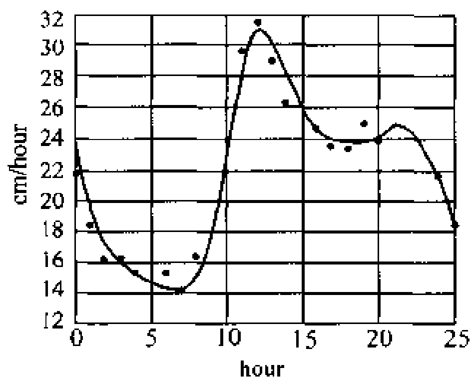


图 18 − 17 $n=(3,4)$ 的流量曲线

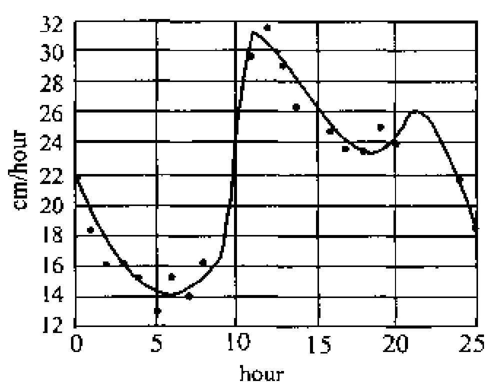


图 18 − 18 $n=(5,6)$ 的流量曲线

18.5.7 分析与改进

由表 18－2 可以看出,第 1 时段用水量与水位测量记录中的下降高度 146 相差无几,第 2 时段用水量与记录中的下降高度 260 相差无几,所以数据拟合、数值积分的精度是足够的. 对不同次数的拟合多项式,第 1、2 供水时段用水量相差稍大,两供水时段水泵的功率也有差别,这都说明供水时段用 3 次曲线通过 4 点的做法不够好,应该多取几点作拟合,但要注意让流量曲线在不同时段相接处保持连续.

由图 18－17 可以看出,流量曲线与原始记录基本上相吻合,0 点到 10 点钟流量很低,10 点到下午 3 点是用水高峰,全天流量平均在 22(cm/h)左右. 若按这个平均流量计算,一天总用水量应为 $22\times24\times237.8\times0.01=1\ 255.6(\mathrm{m}^3)$,与表 18－2 的结果很接近.

18.6 习 题

1. 在化工生产中常常需要知道丙烷在各种温度 T 和压力 P 下的导热系数 K. 下面是实验得到的一组数据:

T(℃)	68	68	87	87	106	106	140	140
$P(10^3\mathrm{kN/m^2})$	9.798 1	13.32 4	9.007 8	13.355	9.791 8	14.277	9.656 3	12.463
K	0.084 8	0.089 7	0.076 2	0.080 7	0.069 6	0.075 3	0.061 1	0.065 1

试求 $T=99$ ℃和 $P=10.3\times10^3\ \mathrm{kN/m^2}$ 下的 K.

2. 下表给出了某一海域以码为单位的直角坐标 Oxy上一点(x,y)(水面一点)以英尺为单位的水深 z,水深数据是在低潮时测得的,船的吃水深度为 5 英尺. 问在矩形区域$(75,200)\times(-50,150)$里哪些地方船要避免进入.

低潮时测得的水深数据

x	129	140	103.5	88	185.5	195	105.5
	157.5	107.5	77	81	162	162	117.5
y	7.5	141.5	23	147	22.5	137.5	85.5
	－6.5	－81	3	56.5	－66.5	84	－33.5
z	4	8	6	8	6	8	8
	9	9	8	8	9	4	9

3. 用给定的多项式,如 $y=x^3-6x^2+5x-3$,产生一组数据(x_i,y_i),$i=1,2,\cdots,n$,再在 y_i 上添加随机干扰(可用 rand 产生(0,1)均匀分布随机数,或用 randn 产生 $N(0,1)$分布随机数),然后用 x_i 和添加随机干扰的 y_i 作 3 次多项式拟合,与原系数比较,如果作 2 或 4 次多项式拟合,结果如何?

4. 用电压 $V=10$ 伏的电池给电容器充电,电容器上 t 时刻的电压为 $v(t)=V-(V-V_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ 其中 V_0 是电容器的初始电压,τ 是充电常数. 试由下面一组 t,v 数据确定 V_0 和 τ.

t(s)	0.5	1	2	3	4	5	7	9
v(伏)	6.36	6.48	7.26	8.22	8.66	8.99	9.43	9.63

5. 弹簧在力 F 的作用下伸长 x，一定范围内服从胡克定律：F 与 x 成正比，即 $F=kx$. 现在得到下面一组 F、x 数据，并在 (x,F) 坐标下作图，可以看到当 F 大到一定数据值后，就不服从这个定律了. 试由数据确定 k，并给出不服从胡克定律时的近似公式.

x	1	2	4	7	9	12	13	15	17
F	1.5	3.9	6.6	11.7	15.6	18.8	19.6	20.6	21.1

各章习题答案

1.4 习题答案

1. 该题由人口指数增长模型:$x(t)=x_0e^{rt}$直接计算可求解. x_0 为 $t=0$ 时刻的人口数,,r 为人口增长率,$x(t)$ 为 t 时刻的人口数.

(1) 已知:$x_0=5$ 亿,$r=0.3\%$,$x(t)=10$ 亿,求 t. 将参数代入指数增长模型解方程:

$$10=5\times e^{0.003t}$$

解得: $t=231$

程序为:

```
syms t
f ='10 -5 * exp(0.003 * t)';
solve(f,t);
```

结果为:1881 年可达到 10 亿人口.

(2) 已知:$x_0=36$ 亿,$r=2.1\%$,$x(t)=72$ 亿,求 t. 将参数代入指数增长模型解方程:

$$72=5*e^{0.021t}$$

解得: $t=34$

程序为:

```
syms t
f ='10 -5 * exp(0.021 * t)'
solve(f,t);
```

结果为:2003 年可达到 72 亿人口.

结果评价:由 $2x_0=x_0e^{rt}$,可得当 r 不变时,人口数量增长一倍的时间是一个定值为:

$$T=\frac{\ln 2}{r}$$

(3) 第 1 小问的结果与实际人口误差不很大,吻合较好. 第 2 问的结果与实际人口的误差就偏大了. 原因是该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长. 而事实上,随着人口的增长,自然资源,环境条件等因素对人口增长有限制作用,则当年的人口增长率会随着人口的增长而减小.

2. 将时间分成 3 段,利用指数增长模型 $x(t)=x_0e^{rt}$分段建立模型为

$$\begin{cases} x(t)=x_0e^{r_0t} & 1\leqslant t\leqslant 7(1790—1850) \\ x(t)=x_1e^{r_1t} & 8\leqslant t\leqslant 15(1860—1920) \\ x(t)=x_2e^{r_2t} & 16\leqslant t\leqslant 21(1930—1990) \end{cases}$$

通过表 1-1 的数据拟合得:

$$r_0=0.029\ 6,\qquad r_1=0.020\ 8,\qquad r_2=0.012\ 6$$

将 x_0,x_1,x_2,r_0,r_1,r_2 代入模型,求出指数增长模型预测的人口数,见下表.

年	实际人口(百万)	预测人口(百万)	误差(%)
1810	7.2	7.3	1.4
1820	9.6	10.0	4.2
1830	12.9	13.7	6.2
1840	17.1	18.7	9.4
1850	23.2	25.6	10.3
1870	38.6	38.8	0.6
1880	50.2	51.0	1.5
1890	62.9	65.73	4.5
1900	76.0	81.1	6.7
1910	92.0	100.64	9.4
1920	106.5	117.4	10.3

3. 设 $x(n)$ 表示某人口群体在第 n 年的总数，设初始年为零，记为 $x(0)$，x_m 为最大人口容量，

令增量

$$\Delta x = x(n+1) - x(n)$$

人口的增长速度与 $x_m - x(n)$ 成正比，即

$$\Delta x = r(x_m - x(n))$$

其中，r 表示出生率与死亡率之差. 于是

$$x(n+1) = x(n) + r(x_m - x(n))$$

得一阶差分方程

$$x(n+1) = (1-r) \times (n) + rx_m$$

令 $x_m = -\lambda$，则：

$$x(n+1) + \lambda = (1-r)(x(n) + \lambda)$$

$$\frac{x(n+1)+\lambda}{x(n)+\lambda} = 1 - r$$

构成等比数列解得：

$$x(n+1) = x(0)(1-r)^n - x_m(1-r)^n + x_m$$

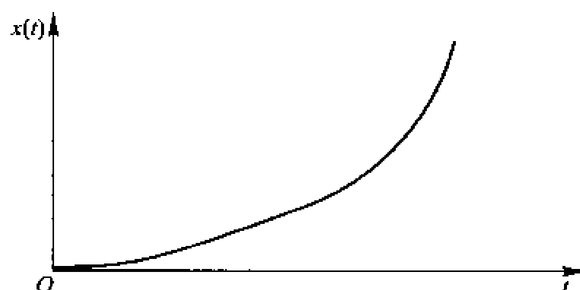
$$x(n+1) = x(0)(1-r)^n + x_m(1-(1-r)^n)$$

故模型为：

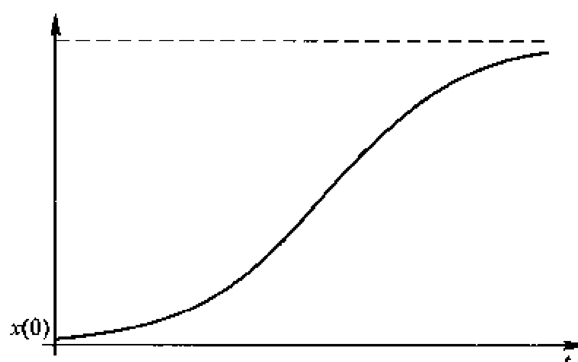
$$x(n+1) = x(0)(1-r)^n + x_m(1-(1-r)^n)$$

作出三个模型图形如下：

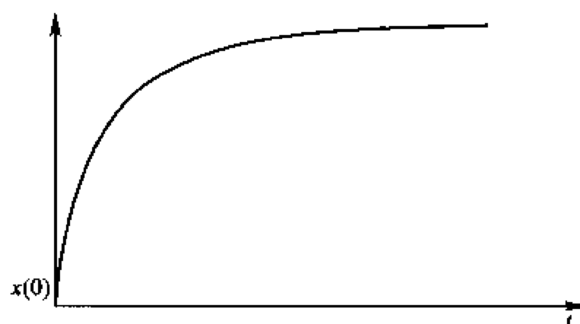
(1) 指数增长模型图形



(2) 阻滞增长模型图形



(3) 增量模型图形



图形比较:指数模型人口按几何级数增长,这个模型与现实不符合,因为人口的增加要受到自然条件等因素的约束. 阻滞增长模型和增量模型,考虑了在最大的人口容量,当人口增长到一定程度时就会无限趋于人口最大容量,这与现实是符合的. 阻滞增长模型和增量模型的区别是阻滞增长模型是用连续的方法讨论的,增量模型是直接用离散的方法讨论的.

2.6 习题答案

1. (1) 起泡法排序 n 个数

```
function y = qp(x)% 求出向量 x 的维数
[m,n] = size(x);% 起泡法排序过程
for i =1:n
    for j =1:n - i
```

```
        if(x(j) >x(j +1))
            a =x(j);
            x(j) =x(j +1);
            x(j +1) =a;
        end
        end
    end
    y =x;
```

```
(2) function max_1(x)% x 为任意维矩阵
[c,t] =max(x);% 先求出矩阵 x 每一列的最大值和最大值位于的行数
[y,i] =max(c);% 求出矩阵 x 的最大值和最大值的列下标
t(i);% 最大值的行下标
disp(['最大值为:',num2str(y)]);% 显示结果
disp(['位子为',num2str(t(i)),'行',num2str(i),'列']);
```

```
(3) function y =JC(n)% 求任意一个整数阶乘之和的程序(n 为待求整数)
y =1;% 1 的阶乘
for i =1:n  % 求各个数的阶乘
    for j =1:i
        z =(i -1) * i;
    end
    % 求每个数阶乘的和
    y =y +z;
end
```

```
(4) % s 为 n 次落地后总共经过的距离,h 为第 n 次落地后反弹的高度,n 为次数.
function [s,h] =sh(n)
z =100;
s =z;
for i =1:n -1
    z =z/2;
    s =s +2 * z;
end
h =z/2
```

```
(5) function y =f(x,y)
y =x^2 +sin(x * y) +2 * y;
```

2. fplot('cos(tan(pi * x))',[0,1],1e-4)

使用 plot 绘图：

```
x = o:1e-4:1
plot(x,cos(tan(pi * x)))
```

3. ezplot('exp(x * y) - sin(x + y)',[-3,3,-3,3])

4. 取 a = 1,ezplot('t - sin(t)','1 - cos(t)',[0,2 * pi])

5.
```
x = -3:0.1:3;
y = -3:0.1:3;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = 2 * X^2 + Y^2;
surf(X,Y,Z)
```

使用 mesh 绘图

```
mesh(X,Y,Z)
```

6. (1)
```
clear
a = 100;thita = 0:0.1:2 * pi;
rho = a * thita;
polar(thita,rho)
```

(2) 用 polar( )函数绘制三叶玫瑰线的 MATLAB 程序如下：

```
clear
a = 2;thita = 0:0.1:2 * pi;
rho = a * sin(3 * thita);
polar(thita,rho)
```

7.
```
subplot(2,2,[1,3])
ezplot('(x^2 + y^2 - 2 * 2 * x)^2 - 4 * 2^2 * (x^2 + y^2)',[-2,10],[-6,6],title('心形线'))
t = -20:.1:20;[x,y] = meshgrid(t);
z1 = (x.^2 - 2 * y.^2) + eps;
subplot(2,2,[2,4]),mesh(x,y,z1),title('马鞍面');
```

3.5 习题答案

1. 设每天每只鸡食动物饲料为 x_1 个单位，谷物饲料为 x_2 个单位（1 单位为 500 克），则

$$\min f = 1\,000(0.15x_1 + 0.09x_2)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geqslant 0.2 \\ 7 \times 1\,000 \cdot x_2 \leqslant 2 \times 6\,000 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

结果：Objective value :   102.0000

```
X1         0.2000000
X2         0.8000000
```

2. 设 A_i 台车床加工零件 B_j 的数量为 $x_{ij}(i=1,2,j=1,2,3)$ 个，则

$$\min f=(2,3,5,3,3,6)(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23})^{T}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(1,2,3)(x_{11},x_{12},x_{13})^{T}\leqslant 80\\(1,1,3)(x_{21},x_{22},x_{23})^{T}\leqslant 100\\x_{11}+x_{21}\geqslant 70\\2x_{12}+x_{22}\geqslant 50\\2x_{13}+3x_{23}\geqslant 20\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,j=1,2,3)\text{ 且为整数}\end{cases}$$

结果：Objective value:297.0000

X11 =30　X12 =25　X13 =0　X21 =40　X22 =0　X23 =7

3. 设 $x_{ij}(i=1,2,j=1,2,3)$ 表示两种原料分别生产出三种产品的数量（万件），则

$$\max f=12(x_{11}+x_{21})+5(x_{12}+x_{22})+4(x_{13}+x_{23})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(4,3,1)(x_{11},x_{12},x_{13})^{T}\leqslant 180\\(2,6,3)(x_{21},x_{22},x_{23})^{T}\leqslant 200\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,j=1,2,3)\end{cases}$$

结果：Objective value: 1920.000

```
            X11       0.0000000          4.000000
            X12       0.0000000          7.000000
            X13       180.0000           0.0000000
            X21       100.0000           0.0000000
            X22       0.0000000          31.00000
            X23       0.0000000          14.00000
Row   Slack or Surplus    Dual Price
            1         1920.000           1.000000
            2         0.0000000          4.000000
            3         0.0000000          6.000000
```

4. 设 $x_i(i=1,2,\cdots,6)$ 为 1～6 班开始工作的护士数，则

$$\min f=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\geqslant 60\\x_1+x_2\geqslant 70\\x_2+x_3\geqslant 60\\x_3+x_4\geqslant 50\\x_4+x_5\geqslant 20\\x_5+x_6\geqslant 30\\x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,j=1,2,3)\text{ 为整数}\end{cases}$$

结果:Objective value: 150.0000

Variable	Value
X1	60.00000
X2	10.00000
X3	50.00000
X4	0.0000000
X5	30.00000
X6	0.0000000

5. (1) 生产产品 A_1 为 x_1 件, A_2 为 x_2 件,则模型为

$$\max f=(6,4)(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 100\\4x_1+2x_2\leqslant 120\\x_i\geqslant 0\ (i=1,2)\text{整数}\end{cases}$$

(4) 再设生产产品 A_3 为 x_3 件,则模型为

$$\max f=(6,4,5)(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 100\\4x_1+2x_2+2x_3\leqslant 120\\x_i\geqslant 0\ (i=1,2,3)\text{为整数}\end{cases}$$

结果:Objective value: 200.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	-6.000000
X2	20.00000	-4.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	200.0000	1.000000
2	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000

Objective value: 206.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	23.00000	-6.000000
X2	2.000000	-4.000000
X3	12.00000	-5.000000

6. 设煤厂 A,B 分别向三个居民区供煤为 $x_{ij}(i=1,2,j=1,2,3)$t,则

$$\min f=(10,5,6,4,8,15)(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23})^{\mathrm{T}}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}\geqslant 60\\x_{21}+x_{22}+x_{23}\geqslant 100\\x_{11}+x_{21}\geqslant 45\\x_{12}+x_{22}\geqslant 75\\x_{13}+x_{23}\geqslant 40\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,j=1,2,3)\end{cases}$$

结果:Objective value: 960.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X11	0.0000000	9.000000
X12	20.00000	0.0000000
X13	40.00000	0.0000000
X21	45.00000	0.0000000
X22	55.00000	0.0000000
X23	0.0000000	6.000000

7. 设生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ种产品数为 $x_i(i=1,2,3)$，则

$$\max f=10x_1+6x_2+4x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 100\\10x_1+4x_2+5x_3\leqslant 600\\2x_1+2x_2+6x_3\leqslant 300\\x_i\geqslant 0(i=1,2,3)\text{整数}\end{cases}$$

(1) 利润是 $4x_3$

$$\max f=10x_1+6x_2+\frac{25}{3}x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 100\\10x_1+4x_2+5x_3\leqslant 600\\2x_1+2x_2+6x_3\leqslant 300\\x_i\geqslant 0(i=1,2,3)\text{为整数}\end{cases}$$

(3) 设生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ种新产品数为 $x_i(i=1,2,3,4)$，则

$$\max f=10x_1+6x_2+4x_3+8x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 100\\10x_1+4x_2+5x_3+4x_4\leqslant 600\\2x_1+2x_2+6x_3+4x_4\leqslant 300\\x_i\geqslant 0(i=1,2,3,4)\text{整数}\end{cases}$$

(4)

$$\max f = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 100 \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leqslant 300 \\ x_3 \geqslant 10 \\ x_i \geqslant 0 (i = 1,2,3) \text{整数} \end{cases}$$

结果为:Objective value: 732.0000

X1 = 33.00000, X2 = 67.00000, X3 = 0.0000000

(1) 不生产,Objective value:774.3325

X1 = 29.00000, X2 = 46.00000, X3 = 25.00000

(2) Objective value: 732.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	33.00000	-10.00000
X2	67.00000	-6.000000
X3	0.0000000	-4.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	732.0000	1.000000
2	0.0000000	0.0000000
3	2.000000	0.0000000
4	100.0000	0.0000000

(3) Objective value: 832.0000

X1 = 33.00000, X2 = 17.00000, X3 = 0.0000000, X4 = 50.00000

(4) Objective value: 704.0000

X1 = 31.00000, X2 = 59.00000, X3 = 10.00000

8. (1) 设设备 A,B,C 分别加工Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ种产品数为 $x_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$,则

$$\max f_1 = 3(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 2(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2.9(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 8x_{11} + 2x_{12} + 10x_{13} \leqslant 300 \\ 10x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} \leqslant 400 \\ 2x_{31} + 13x_{32} + 10x_{33} \leqslant 420 \\ x_{ij} \geqslant 0 (i = 1,2,3, j = 1,2,3) \end{cases}$$

(2) 在问题(1)基础上

$$\max f_2 = 3(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 2(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2.9(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 18$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 8x_{11} + 2x_{12} + 10x_{13} \leqslant 300 \\ 10x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} \leqslant 460 \\ 2x_{31} + 13x_{32} + 10x_{33} \leqslant 420 \\ x_{ij} \geqslant 0 (i = 1,2,3, j = 1,2,3) \end{cases}$$

(3) 设设备 A,B,C 分别加工Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ种产品数为 $x_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3,4,5)$，则

$$\max f_3=3(x_{11}+x_{21}+x_{31})+2(x_{12}+x_{22}+x_{32})+2.9(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$
$$+2.1(x_{14}+x_{24}+x_{34})+1.87(x_{15}+x_{25}+x_{35})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_{11}+2x_{12}+10x_{13}+12x_{14}+4x_{15}\leqslant 300\\10x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+5x_{24}+4x_{25}\leqslant 400\\2x_{31}+13x_{32}+10x_{33}+10x_{34}+12x_{35}\leqslant 420\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3,j=1,2,3,4,5)\end{cases}$$

(4) 设设备 A,B,C 分别加工Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ种产品数为 $x_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$，则

$$\max f_4=4.5(x_{11}+x_{21}+x_{31})+2(x_{12}+x_{22}+x_{32})+2.9(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}9x_{11}+2x_{12}+10x_{13}\leqslant 300\\12x_{21}+5x_{22}+8x_{23}\leqslant 400\\4x_{31}+13x_{32}+10x_{33}\leqslant 420\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3,j=1,2,3)\end{cases}$$

结果：

(1) Objective value: 1290.100

X31 =210.0000, X12 =150.0000, X22 =80.00000，其他为 0

(2) Objective value: 1296.100

X31 =210.0000, X12 =150.0000, X22 =92.00000，其他为 0

(3) Objective value: 1317.100

X31 =210.0000, X12 =150.0000, X25 =100.0000，其他为 0

(4) Objective value: 1132.600

X31 =105.0000, X12 =150.0000, X22 =80.0000，其他为 0

4.3 习题答案

1. 用割平面法可求得最优解为：

$$x_1=2,\quad x_2=2,\quad x_3=1$$

2. 用割平面法可求得最优解为：

$$x_1=2,\quad x_2=1$$

3. 用线性规划不难求得最优解为：

$$x_1=x_2=0$$

4. 用分支定界法得最优解为：

$$x_1=8,\quad x_2=2$$

5.4 习题答案

1. (1) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})=\nabla^2 f(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}2&0&-4\\0&4&0\\-4&0&6\end{bmatrix}$

(2) $H(X)=\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix} 2-\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{bmatrix}$

2. 满足必要条件的点为$(x,\pm x)$,经验证黑塞矩阵正定,从而它们是极小点.

3. $\nabla f(X^0)=[8,16]^T, S^0=-\nabla f(X^0)=[-8,-16]^T$,求解 $\min\varphi(\lambda)=f(X^0+\lambda S^0)$,得 $\lambda_1=\frac{5}{18}, X^1=X^0+\lambda_1 S^0=\left[\frac{16}{9},\frac{-16}{9}\right]^T$;

$S^1=-\nabla f(X^1)=\left[\frac{-32}{9},\frac{16}{9}\right]^T$,再解 $\min\varphi(\lambda)=f(X^1+\lambda S^1)$,得 $\lambda_2=\frac{2}{15}, X^2=X^1+\lambda_2 S^1=\frac{8}{27}[1,1]^T$;

$S^2=-\nabla f(X^2)=-\left[\frac{16}{27},\frac{32}{27}\right]^T$,再解 $\min\varphi(\lambda)=f(X^2+\lambda S^2)$,得 $\lambda_3=\frac{5}{18}, X^3=X^2+\lambda_3 S^2=\frac{-8}{243}[1,11]^T$,显然$(S^0,S^1)=0,(S^1,S^2)=0$.

4. $f(X)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2-2x_1+18x_2$

$X^0=[1,-2,0]^T, \nabla f(X^0)=[0,2,0]^T$,

$\therefore \nabla^2 f(X^0)=\mathrm{diag}[2,8,18]^T \Rightarrow [\nabla^2 f(X^0)]^{-1}=\mathrm{diag}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{18}\right]^T$

$S^0=-[\nabla^2 f(X^0)]^{-1}\cdot\nabla f(X^0)=\left[0,\frac{-1}{4},0\right]^T, X^1=X^0+S^0=\left[1,\frac{-9}{4},0\right]^T$,从而,

$\nabla f(X^1)=[0,0,0]^T \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \|\nabla f(X^1)\|<\varepsilon$,故 $X^*=X^1=\left[1,\frac{-9}{4},0\right]^T$.

5. 程序:
```
oldoptions = optimset('fminunc');
options = optimset(oldoptions,'LargeScale','off');   % 无约束优化的中型算法
options11 = optimset(options,'HessUpdate','dfp');   % 搜索方向为拟牛顿法中的“dfp”
[x, f, exitflag11, output11] = fminunc('fundfp',[-1 1],options11)
```
极小值点为 $x=(-1.3867,0.9889)$,极小值为 $f=-1.2922$.

6.5 习题答案

1. 根据物理定律 $V_k=I_kR_k, W=I^2R, I_4=I_1+I_2+I_3$,建立如下模型:

(1) $W=\min\sum_{k=1}^{4} I_k^2 R_k$

$$\text{s.t.}\begin{cases} I_4=I_1+I_2+I_3 \\ \frac{2}{I_k}\leqslant R_k\leqslant\frac{10}{I_k} \end{cases}$$

(2) $W=\min\sum_{k=1}^{4} I_k^2 R_k$

$$\text{s.t.}\begin{cases} I_4=I_1+I_2+I_3 \\ \frac{V_k}{6}\leqslant R_k\leqslant\frac{V_k}{2} \end{cases}$$

模型(1)的计算结果：$R_1=0.5, R_2=0.333\ 3, R_3=0.25, R_4=0.111\ 1$，功率为 72；
模型(2)的计算结果：$R_1=0.666\ 7, R_2=1, R_3=1.333\ 3, R_4=3$，功率为 1 104.

2. 设购买的原油 A 用于生产甲、乙、丙的数量分别是 x_1, x_2, x_3；购买的原油 B 用于生产甲、乙、丙的数量分别 x_4, x_5, x_6；购买的原油 C 用于生产甲、乙、丙的数量分别 x_7, x_8, x_9. 根据：总利润 = 总收入 − 加工费 − 买油成本及约束条件：需求限制，原料限制，含量限制，非负限制，建立如下模型：

$$\begin{aligned}\max z &= 70\times 3\ 000+60\times 2\ 000-50\times 1\ 000-4\times 6\ 000-45(x_1+x_2+x_3)-35(x_4+x_5+x_6)\\ &\quad -25(x_7+x_8+x_9)\\ &=356\ 000-\min f\end{aligned}$$

从而得到线性规划模型：

$$\min f=45(x_1+x_2+x_3)+35(x_4+x_5+x_6)+25(x_7+x_8+x_9)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_4+x_7=3\ 000\\ x_2+x_5+x_8=2\ 000\\ x_3+x_6+x_9=1\ 000\\ x_1+x_2+x_3\leqslant 5\ 000\\ x_4+x_5+x_6\leqslant 5\ 000\\ x_7+x_8+x_9\leqslant 5\ 000\\ 12x_1+6x_4+8x_7\geqslant 10\times 3\ 000\\ 12x_2+6x_5+8x_8\geqslant 8\times 2\ 000\\ 12x_3+6x_6+8x_9\geqslant 6\times 1\ 000\\ 0.5x_1+2x_4+3x_7\leqslant 3\ 000\\ 0.5x_2+2x_5+3x_8\leqslant 2\times 2\ 000\\ 0.5x_3+2x_6+3x_9\leqslant 1\ 000\\ x_i\geqslant 0, i=1,2,3,\cdots,9\end{cases}$$

模型求解：

利用 MATLAB 编程求解得：总盈利为 126 000 元，生产计划见下表：

	甲(3000)	乙(2000)	丙(1000)
$A/45$	2 400	800	800
$B/35$	0	0	0
$C/25$	600	1 200	200

改进：通过广告增加销售(1 元广告费，增加 10 桶销售).

设甲、乙、丙 3 种汽油的广告费分别是 x_{10}, x_{11}, x_{12}，广告费不超过 800 元，则模型为：

$$\min f=49(x_1+x_2+x_3)+39(x_4+x_5+x_6)+29(x_7+x_8+x_9)-699x_{10}-599x_{11}-499x_{12}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_4+x_7=3\ 000+10x_{10}\\x_2+x_5+x_8=2\ 000+10x_{11}\\x_3+x_6+x_9=1\ 000+10x_{12}\\x_1+x_2+x_3\leqslant 5\ 000\\x_4+x_5+x_6\leqslant 5\ 000\\x_7+x_8+x_9\leqslant 5\ 000\\12x_1+6x_4+8x_7\geqslant 10(3\ 000+10x_{10})\\12x_2+6x_5+8x_8\geqslant 8(2\ 000+10x_{11})\\12x_3+6x_6+8x_9\geqslant 6(1\ 000+10x_{12})\\0.5x_1+2x_4+3x_7\leqslant 3\ 000+10x_{10}\\0.5x_2+2x_5+3x_8\leqslant 2(2\ 000+10x_{11})\\0.5x_3+2x_6+3x_9\leqslant 1\ 000+10x_{12}\\0\leqslant\sum_{i=10}^{12}x_i\leqslant M\end{cases}$$

模型求解：

利用 MATLAB 编程求解得：总盈利：126 000 元，生产计划见下表：

	甲(3000)	乙(2000)	丙(1000)
A/45	2 121.8	2 185.3	692.9
B/35	695.5	4 036.8	267.6
C/25	182.7	3 277.9	39.4
广告	0	750	0

3. 根据题意建立模型：

$$\max f=100V-0.3V^2+80W-0.2W^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}V+2W\leqslant 520\\5V-4W\leqslant 0\end{cases}$$

用线性化方法求解：给定初始可行点 $X^1=(150,185)^T$，步长限制 $\delta^1=(2,2)^T$，步长缩小系数 $\beta=0.5$，设 $X=(V,W)$，则：

(1) $f(X)\approx f(X^1)+\nabla f(X^1)^T(X-X^1)=10V+6W+13\ 595.$

步长限制：$|X-X^1|\leqslant\delta^1\Rightarrow 149\leqslant V\leqslant 151,183\leqslant W\leqslant 187.$

得到近似线性规划：

$$\max f=10V+6W+13\ 595$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}V+2W\leqslant 520\\5V-4W\leqslant 0\\149\leqslant V\leqslant 151,183\leqslant W\leqslant 187.\end{cases}$$

用 MATLAB 求解此线性规划模型得：$X^1=(148.6,185.7)^T$，$f=1\ 619.5.$

(2) $f(X) \approx f(X^2) + \nabla f(X^2)^T (X - X^2) = 10.84V + 5.72W + 13\ 521$，步长限制：$|X - X^1| \leqslant \delta^2 = (1,1)^T \Rightarrow 147.6 \leqslant V \leqslant 149.6, 184.7 \leqslant W \leqslant 186.7$

得到近似线性规划：

$$\max f = 10.84V + 5.72W + 13\ 521$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V + 2W \leqslant 520 \\ 5V - 4W \leqslant 0 \\ 147.6 \leqslant V \leqslant 149.6, 184.7 \leqslant W \leqslant 186.7 \end{cases}$$

用 MATLAB 解此线性规划模型得：$X^2 = (148.57, 185.71)^T$，$f = 16\ 193.8$.
经检验 $X^2 = (148.57, 185.71)^T$ 就是模型的最大值点，$f = 16\ 193.8$ 就是最大值.

4. 设 x_1, x_2, x_3 分别表示工厂第一、二、三季度生产的发动机数量，模型如下：

$$\min = a(x_1 + x_2 + x_3) + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c(2x_1 + x_2 - 140)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \geqslant 40 \\ x_1 + x_2 \geqslant 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 180 \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 100 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

由于是整数规划，利用 LINGO 软件编程.

计算结果为：$x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 70$.

通过分别改变 $a = 50, b = 0.2, c = 4$ 的值（改大、小）多次计算发现：

$a = 50$ 的变换没有影响；

b 越大，x_1 越大，x_3 越小；b 越小，x_1 越小，x_3 越大；

c 越大，生产就越不剩余，即按需求生产；c 越小，三个季度就越接近于平均生产以保证费用最低.

5. 令 $d = (290, 315, 350, 455)$ 为 4 种产品的长度，$n = (15, 28, 21, 30)$ 为 4 种产品的需求量，第 i 种切割模式下每根原料钢管生产 4 种产品的数量分别为 $r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$，该模式共使用了 x_i 次，切割模式的次序是按照使用频率从高到低排列的，引入 0－1 变量 y_i 来表示第 i 种切割模式的使用情况：$y_i = 1$ 表示使用了第 i 种切割模式，$y_i = 0$ 表示未使用第 i 种切割模式. 模型为：

$$\min \sum_{i=1}^{4} (x_i + 0.1 \times i \times y_i)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_i r_{ji} \geqslant n_j & (j = 1,2,3,4) \quad (\text{产品数量}) \\ 1\ 750 y_i \leqslant \sum_{j=1}^{4} b_j r_{ji} \leqslant 1\ 850 y_i & (i = 1,2,3,4) \quad (\text{余料限制}) \\ y_i \leqslant \sum_{j=1}^{4} r_{ji} \leqslant 5 y_i & (i = 1,2,3,4) \quad (\text{1 根钢管最多生产 5 根产品}) \\ y_i \leqslant \sum_{i=1}^{4} x_i \leqslant 30 y_i & (i = 1,2,3,4) \quad (\text{每种切割模式最多切割 30 根}) \\ y_{i+1} \leqslant y_i & (i = 1,2,3,4) \\ x_{i+1} \leqslant x_i & (i = 1,2,3,4) \end{cases}$$

计算结果:只使用了 3 种切割模式,分别使用了 9、7、3 次. 一根原料钢管用第一种模式生产 4 种产品各 1、2、0、2 根,用第二种模式生产 4 种产品各 0、1、3、1 根,用第三种模式生产 4 种产品各 2、1、0、2 根,目标函数值为 19.6.

7.6 习题答案

1. 用递推法可求得最优解为:

$$x_1=1,\qquad x_2=2,\qquad x_3=1$$

2. 最优生产计划为:第一个月生产 800 件,第三个月生产 500 件,总费用 2 500 元.

8.7 习题答案

1. 设 t 时刻湖区的污染物浓度为 $w(t)$,利用质量守恒定律:

湖水污染浓度的变化量 = 流入湖水的污染量 - 流出湖水的污染量,可得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{rw_1}{V}-\frac{rw}{V}$$

其中 w_1 表示流入湖中的水的污染浓度,$w_0=w(0)$. 解方程得

$$w(t)=w_1-(w_1-w_0)\mathrm{e}^{-\frac{rt}{V}}$$

代入 $w_1=0, w(t)=5\% w_0$,解得 $t=398.3$(天).

2. 无捕捞时鱼的自然增长服从 logistic 规律,即

$$x'(t)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$$

捕捞情况下渔场鱼量满足

$$x'(t)=F(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)-kx$$

其中 k 为捕捞强度,r 为固有增长率. 不需要求解 $x(t)$,只需知道 $x(t)$ 稳定的条件. 令 $F(x)=0$,求出平衡点 $x_0=N\left(1-\frac{k}{r}\right)$,$x_1=0$,易知当 $k<r$ 时,x_0 稳定,可使渔场的鱼资源保持稳定.

3. 假设一天服药 n 次,时间间隔为 T,则在

$0\leqslant t<T$ 方程是 $x(t)=a\mathrm{e}^{-kt}$

$T\leqslant t<2T$ 方程是 $x(t)=(a+a\mathrm{e}^{-kT})\mathrm{e}^{-k(t-T)}$

…………

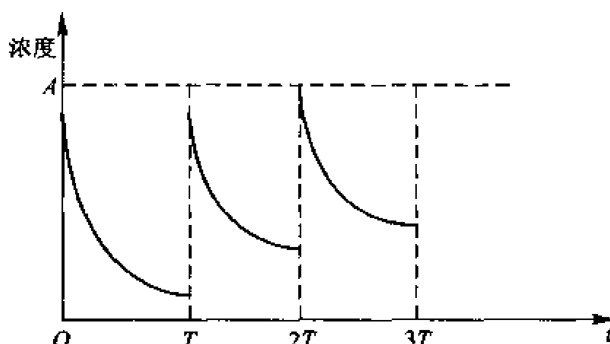
$nT\leqslant t<(n+1)T$ 方程是 $x(t)=(a+a\mathrm{e}^{-kT}+\cdots+a^{-nkT})\mathrm{e}^{-k(t-nT)}$

上面的当 $n\to\infty$,可以求出 $a+a\mathrm{e}^{-kT}+\cdots+a^{-nkT}$ 的极限是 $\frac{a}{1-\mathrm{e}^{-kT}}$.

因此在等间隔服药的过程中,药的浓度在人体中呈上升趋势,最后稳定在一定的水平. 图像如图所示. 其中 A 是浓度的最大值

4. 可参照例 7.

5. 设需求量有一个上界,并记此上界为 K,记 t 时刻已销售出的新产品数量为 $x(t)$,则尚未



使用的人数大致为 $K-x(t)$，记比例系数为 k，则 $x(t)$ 满足：

$$\frac{dx}{dt}=kx(K-x)$$

此方程即 logistic 模型，解为：

$$x(t)=\frac{K}{1+Ce^{-Kkt}}$$

对 $x(t)$ 求一阶、两阶导数分别得：

$$x'(t)=\frac{CK^2ke^{-Kkt}}{(1+Ce^{-Kkt})^2}$$

$$x''(t)=\frac{CK^3k^2e^{-Kkt}(Ce^{-Kkt}-1)}{(1+Ce^{-Kkt})^3}$$

$x'(t)>0$，即 $x(t)$ 单调增加；

令 $x''(t_0)=0$，有 $x(t_0)=K/2$；

当 $t<t_0$ 时，$x'(t)$ 单调增加，当 $t>t_0$ 时，$x'(t)$ 单调减小.

在销出量小于最大需求量的一半时，销售速度是不断增大的，销出量达到最大需求量的一半时，该产品最为畅销，接着销售速度将开始下降.

所以初期应采取小批量生产并加以广告宣传；从有 20% 用户到有 80% 用户这段时期，应该大批量生产；后期则应适时转产，这样做可以取得较高的经济效果.

6. 变量及参数说明：

x：时刻 t 时运动员质心移动的距离；

F：阻力，只考虑正面水平作用力；

M：运动员的质量，取值为 80 kg；

c：阻尼系数，取值 0.375；

A：身体正面的截面积，取值 0.75 m^2；

P：空气密度：

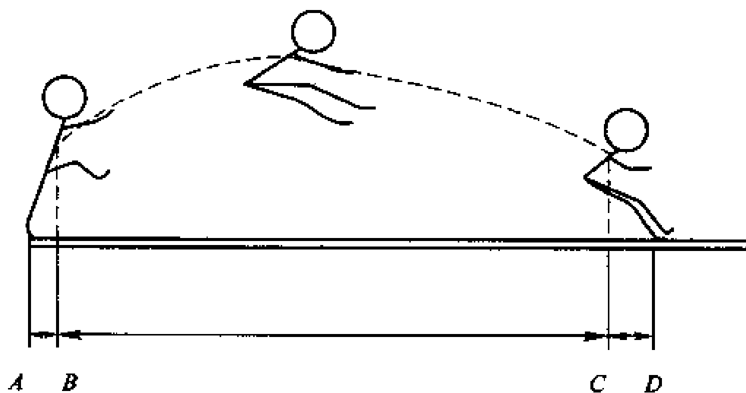
在墨西哥城 $P_{Mex}=0.984\ kg/m^3$；

在海平面 $P_{sea}=1.225\ kg/m^3$.

记 AB：表示起跳时，着地脚和质心之间距离的水平投影（水平距离）；

CD：表示落地时，着地脚和质心之间距离的水平投影（水平距离）；

BC：从起跳到落地这段时间，质心移动的水平距离.（如图所示.）



而对于一个固定的运动员来说,AB,CD 这两段距离是固定的,即我们只需研究 BC 段. 又因为质心 M 的高度变化远小于 BC 段的长度,故忽略不计.

记 AB 段的长度是 R,运动员起跳的水平速度为 v_0,从起跳到落地的时间是 T.

则由牛顿第二运动定律得: $$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-F$$

由于 F 与阻尼系数,身体截面积,速度的平方成正比,因此上面的方程可以变为

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-cAP\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

再由初始条件:$x(0)=0,\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}=v_0$,这就是一个完整的 ODE 问题.

下面我们来解这个微分方程

我们用降阶的方法来解这个方程,记 $u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,则问题变为

$$M\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-cAPu^2,\ u(0)=v_0$$

解得: $$\frac{1}{u}=\frac{cAP}{M}t+\frac{1}{v_0}$$ 代入 $u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

得到:$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{Mv_0}{M+cAPv_0t}$, $x(0)=0$

因为质心水平位移移动 R 用时为 T,故在时间区间$[0,T]$上对上式进行积分得

$$R=\frac{M}{cAP}\ln\left(1+\frac{cAPv_0T}{M}\right) \quad (*)$$

将 $PTv_0=12.231$ 和上面参数代入可以得出:

$$\frac{cAPv_0T}{M}\approx 0.043$$

由于这项数值是很小的,因此可以对(*)对数项做级数展开为

$$\frac{cAPv_0T}{M}-\frac{1}{2}\left(\frac{cAPv_0T}{M}\right)^2$$

代回到(*)式,可得 R 的近似计算公式:

$$R\approx v_0T-\frac{cAPv_0^2T^2}{2M}$$

下面我们算一下，在不同海拔处 R 的差值：

$$\Delta R = R_{Mex} - R_{sea} \approx -\frac{cAv_0^2T^2}{2M}(P_{Mex} - P_{sea}) \approx 0.042\ \mathrm{m}$$

因此，我们得到如下结论：空气阻力对运动员的成绩是有影响的，但是很微小，可以忽略不计．故鲍伯·比蒙的惊人一跳是不能用空气阻力的减小来解释的．

9.5 习题答案

1．设共有 $g(n)$ 种不同的上楼梯方法．在这 $g(n)$ 种不同的上楼梯方法中，恰有 $k\left(0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{3}\right]\right)$ 步上 3 级台阶（此时有 $n-3k$ 步上 1 级台阶）的上楼梯方法的种数为

$$\frac{(k+n-3k)!}{k!\ (n-3k)!} = \binom{n-2k}{k}$$

所以：$g(n) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n-2k}{k}$．

2．令 h_n 表示允许传输的长度为 n 的单词个数，则 $h_0 = 1$（空单词），$h_1 = 3$．令 $n \geqslant 2$，如果单词第一个字母是 b 或 c，则余下长度 $n-1$ 的位置上仍然是在相同条件下对 a,b,c 这 3 类字母的排列，排列方法数为 h_{n-1}．如果第一个字母是 a，那么第二个字母就是 b 或 c．如果第二个字母是 b 或 c，则单词数为 h_{n-2}，于是有

$$h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$$

特征方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的根 $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$，再利用初始条件 $h_0 = 1, h_1 = 3$，可解得

$$h_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

3．设这 n 个圆把平面划分成 a_n 个不连通的区域．易知 $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$，当 $n \geqslant 2$ 时，去掉所给 n 个圆中的一个圆 K，则剩下的 $n-1$ 个圆把平面划分成 a_{n-1} 个不连通的区域．现把圆 K 放回原处，则圆 K 与其余 $n-1$ 个圆都相交，且所得的 $2(n-1)$ 个交点彼此相异（因为无 3 个圆共点），这 $2(n-1)$ 个交点把圆 K 分成 $2(n-1)$ 段弧，每段弧把原来的一个区域划分成两个小区域．故把圆 K 放回原处后增加了 $2(n-1)$ 个区域，从而

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \cdots = 2 + n(n-1)$$

故

$$a_n = n^2 - n + 2 \quad (n \geqslant 2)$$

4．设有 a_n 种不同的方式，则 $\{a_n\}$ 的母函数

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot [1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots]$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

又

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

两边求导，得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3+(1)^n}{4}x^n$$

故
$$a_n=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$

5. 记第 k 时段猪的数量为 x_k，价格为 y_k，$k=1,2,\cdots$. 同一时段猪的价格 y_k 取决于数量 x_k，设 $y_k=f(x_k)$. 它反映消费者对猪的需求关系.

下一时段猪的数量 x_{k+1} 由上一时段价格 y_k 决定，设

$$x_{k+1}=h(y_k) \text{ 或 } y_k=g(x_{k+1})$$

g 是 h 的反函数.

$$y_k-y_0=-\alpha(x_k-x_0),\alpha>0$$
$$x_{k+1}-x_0=\beta(y_k-y_0),\beta>0$$

从二式中消去 y_k 可得

$$x_{k+1}-x_0=-\alpha\beta(x_k-x_0),k=1,2\cdots$$
$$x_{k+1}-x_0=(-\alpha\beta)^k(x_1-x_0)$$

10.4 习题答案

1. 一个正整数能被 3 整除当且仅当它的各位数字之和能被 3 整除，于是可通过如下方法依次写出百位、十位和个位数字去作出满足题意的三位数.

百位数字可选 1,2,3,4,5,7,8,9 之一，有 8 种选法；十位数字可选 0,1,2,3,4,5,7,8,9 之一，有 9 种选法. 设已选的百位数字与十位数字之和除以 3 的余数为 d. 若 $d=0$，则个位数字可选 0,3,9；若 $d=1$，则个位数字可选 2,5,8；若 $d=2$，则个位数字可选 1,4,7，因此个位数字的选取方法有 3 种. 由乘法原理，能被 3 整除但又不含数字 6 的三位数有 $8\times9\times3=216$ 个.

2. 设有 N 种不同的安排住宿的方法，这些方法可分成如下两类：

(1) 有 1 个房间安排 3 人入住的住宿方法，有 $\binom{7}{5}\times5!=4\ 200$ 种；

(2) 有两个房间均安排 2 人入住的住宿方法，有 $\binom{7}{5}\times3\times5!=12\ 600$ 种.

由加法原理得 $N=4\ 200+12\ 600=16\ 800$.

3. 以 $A_j(j=1,2,\cdots,a+b)$ 表示点 $(j,a_1+a_2+\cdots+a_j)$，其中

$$a_j=\begin{cases}1,\text{若第 } j \text{ 次唱票时，甲得票}\\-1,\text{若第 } j \text{ 次唱票时，乙得票}\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,a+b.)$$

则满足题意的点票过程可用有向折线 $\overline{A_1A_2\cdots A_{a+b}}$ 表示. $A_j(j=1,2,\cdots,a+b)$ 是整点. 由于在点票过程中甲的得票恒领先于乙，故 A_j 的纵坐标大于 0，而 $A_{j+1}(j=1,2,\cdots,a+b-1)$ 与 A_j 的横坐标之差为 1，纵坐标之差为 1 或 -1，故 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 是一个 T 步，从而 $\overline{A_1A_2\cdots A_{a+b}}$ 是由 $A_1(1,1)$ 到 $A_{a+b}(a+b,a-b)$ 且不经过 x 轴的一条 T 路. 于是不同的点票情形的种数等于整点 $(1,1)$ 到整点 $(a+b,a-b)$ 且不经过 x 轴的 T 路的条数为

$$\frac{(a-b)\cdot(a-b+1)!}{a!\cdot b!}$$

4. 设可编写出 N 种不同的演出节目单. 可依如下三个步骤去编写节目单:

(1) 做 6 个演唱节目的全排列,有 $6!=720$ 种方法;

(2) 从做成的排列的左边、右边及 6 个元形成的 5 个空隙这 7 个位置中选出 4 个位置,有 $\binom{7}{4}=35$ 种方法;

(3) 把 4 个舞蹈节目放在已选出的 4 个位置上,每个位置放一个舞蹈节目,有 $4!=24$ 种方法.

由乘法原理得 $N=720\times35\times24=604\ 800$.

5. (1) $D_7=7!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^7\frac{1}{7!}\right)$

(2) $7!-D_7$

(3) $7!-D_7-C_7^1\cdot D_6$

6. 作 3 只绿球、2 只红球和 2 只白球的全排列,有 $\frac{(3+2+2)!}{3!\cdot2!\cdot2!}=210$ 种方法.

(1) 从作成的排列左边、右边以及 7 个元形成的 6 个空隙这 8 个位置中选取 3 个位置,有 $\binom{8}{3}=56$ 种选取方法.

(2) 把 3 只黄球放在选出的 3 个位置上,每个位置放 1 只黄球,有 1 种方法.

由乘法原理得 $N=210\times56\times1=11\ 760$.

7. 设 $m(m\geqslant2)$ 已取定,以 a_n 表示所求的不同的涂色方法数. $a_2=m(m-1)$. 因为用 $m(m\geqslant2)$ 种颜色去涂 $1\times n(n\geqslant3)$ 的棋盘,使相邻格子异色的涂色方法共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种,其中首末两格异色的有 a_n 种,首末两格同色的有 a_{n-1} 种,由加法原理,有 $a_n+a_{n-1}=m(m-1)^{n-1}$, $(n\geqslant3)$,

所以 $a_n=-a_{n-1}+m(m-1)^{n-1}$, $a_n=(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$.

11.5 习题答案

1. 任意两城市之间最廉价线路及票价为(箭头可逆):

C1→C2:1→6→2;35

C1→C3:1→5→3,1→6→4→3;45

C1→C4:1→6→4,1→5→4;35

C1→C5:1→5;25

C1→C6:1→6;10

C2→C3:2→3;15

C2→C4:2→4;20

C2→C5:2→4→5;30

C2→C6:2→5;25

C3→C4:3→4;10

C3→C5:3→5;3→4→5;20

C3→C6:3→4→6;35

C4→C5:4→5;10

C4→C6:4→6;25

C5→C6:5→4→6;35

2. 利用程序求得任意两点的距离矩阵为

D =

0	3	10	8	12	20	17	23
3	0	11	5	9	17	14	20
10	11	0	6	10	18	15	21
8	5	6	0	4	12	9	15
12	9	10	4	0	8	5	11
18	15	16	10	6	0	3	4
17	14	15	9	5	3	0	6
22	19	20	14	10	4	6	0

经过的中间点矩阵为

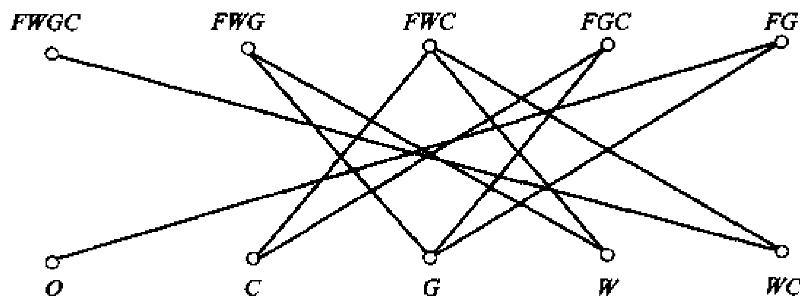
R =

1	2	3	2	2	2	2	2
1	2	4	4	4	4	4	4
1	4	3	4	4	4	4	4
2	2	3	4	5	5	5	5
4	4	4	4	5	7	7	7
5	5	5	5	5	6	7	8
5	5	5	5	5	6	7	8
6	6	6	6	6	6	7	8

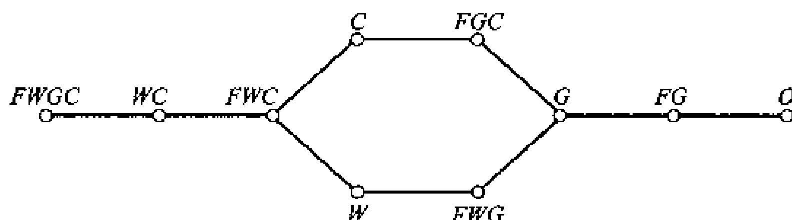
3. v_1到v_8的最短时间路径为15,路径为 1—2—4—7—8.

4. 分别用字母表示人F、狼W、羊G和白菜C,用小圆圈表示顶点,字母表示河岸边的各个状态,两顶点连线当且仅当两状态可在规则允许下转移.

人F、狼W、羊G和白菜C的任意不同的组合共有$C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$,其中狼羊菜、狼羊、羊菜不允许,从而人、人狼、人菜三种情况也不会出现. 因此共有10个允许状态,起状态转移关系如下图,O表示空状态.



问题归结为求顶点 *FWGC* 到顶点 *O* 的最短路，将图改画为下面形式：



显然有两种过河方案，且等优．如先将羊运到对岸，再将狼运到对岸，同时将羊带回原处，将白菜运到对岸，最后将羊运到对岸．

12.5 习题答案

1. 当每个人将手中的对子都抛出来后，谁手中的牌多，“乌龟”就在谁手中．

2. ad、bf、ce 分别在一组．

3. 根据定理 4(3) 的结论可以把男士和女士正好分成 n 对，使每一对男女都彼此认识．

4. 用原料 x_1 生产产品 y_4；用原料 x_2 生产产品 y_2；用原料 x_3 生产产品 y_3；用原料 x_4 生产产品 y_1．

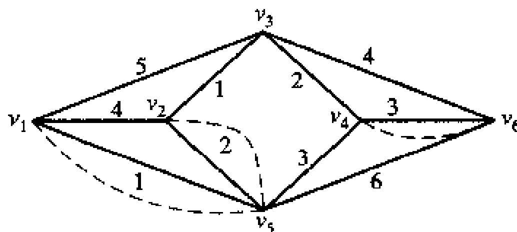
5. 四种不同规格的产品在四种不同性能的机床上同时加工，使总时间最短，此问题属于匹配问题，1 号产品在 1 号机床上加工，2 号产品在 2 号机床上加工，3 号产品在 3 号机床上加工，4 号产品在 4 号机床上加工，最短时间为 61 个工时．

6. 第 3 辆车到地点 1，第 4 辆车到地点 2，第 5 辆车到地点 3，第 6 辆车到地点 5，第 7 辆车到地点 4.

13.4 习题答案

1. 该图为欧拉图，直接求欧拉巡回为：1→2→3→4→5→6→7→3→6→4→2→5→1.

2. 该图有 4 个奇次顶点，添加重复边如图：



欧拉巡回为：1→5→2→3→4→6→3→1→2→5→6→4→5→1，巡回长度为 37.

3. 最佳哈密尔顿回路为 1→3→4→5→2→1，权为 167.

4. 四个工件需要在同一台机器上一同时加工，属于行遍性问题．结果是：A→B→D→C.

14.4 习题答案

1. valf = 12.

2. 该网络的运输能力能满足这一要求．车间 D_1 生产数 15，车间 D_2 生产数 11 最为恰当．

3. 不存在满足要求的载法．当飞机容量分别为7、7、6、4、4时，存在满足题目要求的载法，使同一类型的设备不会有两台在同一架飞机上．

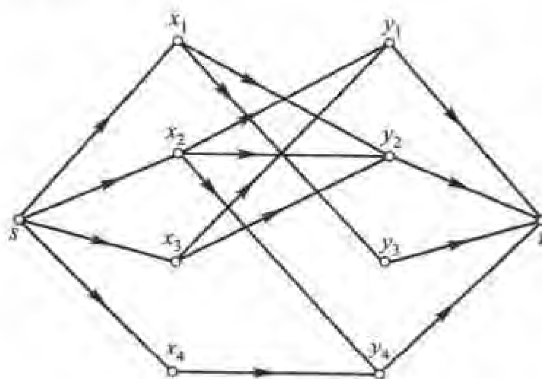
4. 有两种方案．王二：钢琴；张三：小提琴（大提琴）；李四：大提琴（小提琴）；赵五：吉他．

该问题转化为最大流问题如下：

$x_i(i=1,2,3,4)$ 分别表示王二、张三、李四、赵五；

$y_j(j=1,2,3,4)$ 分别表示小提琴、大提琴、钢琴、吉他．

增加虚点 s、t，设每条弧容量为1，如下图：



5. 最小费用流为20.

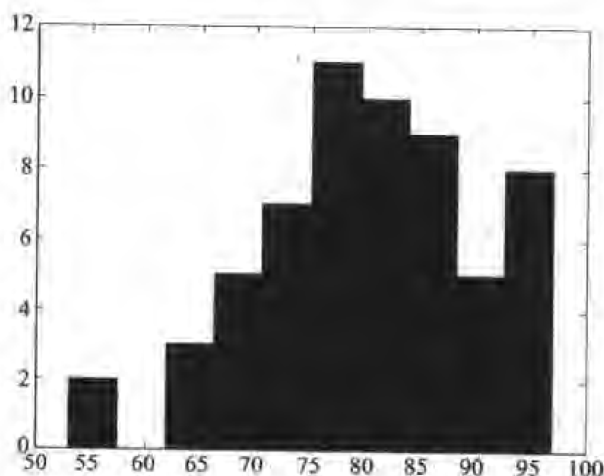
6. (1) 1,2,3,4月生产部件数分别为10,4,10,0；

(2) 1,2,3,4月生产部件数分别为9,4,9,2.

15.5 习题答案

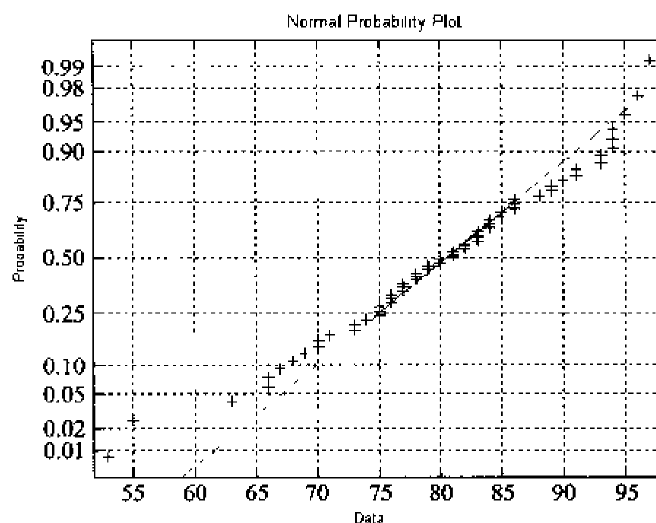
1. 解答：(1) mean(x) =80.1000，std(x) =9.7106，极差为97 -53 =24，skewness(x) = -0.4682，kurtosis(x) =3.1529，hist(x).

直方图为



(2) normplot(x)

(3) [muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(x)



muhat =80.1000 sigmahat = 9.7106 muci =[77.5915, 82.6085]

sigmaci = [8.2310,11.8436]

2. 解答:[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] =normfit(x,0.1)

muhat =35.2500 sigmahat =7.2378 muci =[31.4977 39.0023]

sigmaci =[5.4119,11.2233]

所以发现者当时的平均年龄的置信水平为95%的单侧置信上限为39.002 3.

3. 解答:mean(x) =21.6429 std(x) =0.7277

[h,sig,ci] = ztest(x,21.6429,0.7727,0.05,0)

h =0 sig =09999 ci =[21.0704 22.2153]

检验结果:布尔变量 h =0,表示不拒绝零假设.说明提出的假设均值21.642 9是合理的,95%的置信区间为[21.070 4 22.215 3]

4. 解答:作假设:mean =72,不知其方差,故用以下命令检验

[h,sig,ci] =ttest(x,72)

返回:h =1 sig =0.0366 ci =[63.1585 71.6415]

检验结果:布尔变量 h =1,表示拒绝零假设. 说明中毒者和正常人的脉搏有显著差异.

5. 解答:normplot(x)

[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] =normfit(x)

muhat =62.4000 sigmahat =11.0373 muci =[54.5044, 70.2956]

sigmaci =[7 5919, 20.1498]

6. 解答:mean(x) =15.0500 mean(y) =15

[h,sig,ci} =ttest2(x,y)

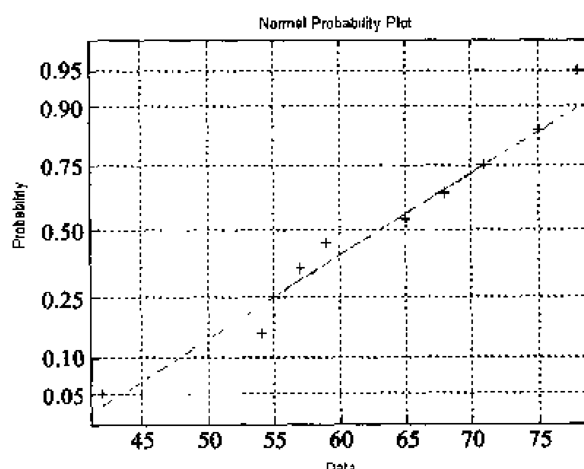
h =0 sig =0.5956 ci =[-0.1465,0.2465]

由于 h =0,服从相同的正态分布.

7. 解答:(1) normplot(x) normplot(y)

[h,sig,ci] =ttest(x,115)

h =0 sig =0.8642 ci =[113.3388 116.9612] 说明1月可以认为是115



美分；

```
[h,sig,ci] = ttest(y,115)
```

h = 1 sig = 1.3241e - 006 ci = [119.0129 122.4871] 说明2月不能认为是115美分.

(2) [muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(x)

```
muhat = 115.1500          muci = [113.3388, 116.9612]
[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(y)
muhat = 120.7500          muci = [119.0129, 122.4871]
```

(3) z = x - y

```
[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(z)
muhat = -5.6000          muci = [-8.1607, -3.0393]
```

16.4 习题答案

1. 解答：程序

```
x = [20 25 30 35 40 45 50 55 60 65]';
X = [ones(10,1)  x];
Y = [13.2  15.1  16.4  17.1  17.9  18.7  19.6  21.2  22.5  24.3]';
[b,bint,r,rint,stats] = regress(Y,X);
b,bint,stats
```

结果：b = 9.1212 0.2230

```
bint = 8.0211  10.2214
       0.1985   0.2476
stats = 0.9821  439.8311  0.0000
```

回归方程：$y = 9.1212 + 0.2230x$

```
polytool(x',Y',1)
```

当 $x = 42$℃ 时的预测值和区间：18.4885 ± 1.1681

2. 解答：程序

```
x =[0  2   4   6   8   10   12   14   16   18   20];
y =[0.6 2.0 4.4  7.5  11.8 17.1  23.3  31.2  39.6  49.7  61.7];
[p,S] =polyfit(x,y,2)
```

结果:p =0.1403 0 1971 1.0105

S =R:[3x3 double]

df:8

normr: 1.1097

y 关于横坐标 x 的二次多项式回归方程:$y = 0.140\,3x^2 + 0.197\,1x + 1.010\,5$

3. 解答:先建立非线性函数 volum.m 文件:

```
function yhat = volum(beta,x)
yhat =beta(1) +beta(2) * log(x);
```

主程序如下:

```
x =[2   3   4   5   7   9   12  14  17  21  28  56];
y =[35  42  47  53  59  65   68  73  76  82  86  99];
beta0 =[1 1]';

[beta,r,J] =nlinfit(x',y','volum',beta0);
beta
```

结果为:beta =21.005 0 19.528 8.

养护日期 x(日)及抗压强度 y(kg/cm^2)的回归方程:$y = 21.005\,0 + 19.528\,8\ \ln(x)$

4. 解答:先建立非线性函数 volum2.m 文件:

```
function yhat =volum2(beta,x)
yhat =[beta(1).*x(2) -x(3)./beta(5)]./[1 +beta(2).*x(1) +beta(3).*x
(2) +beta(4).*x(3)];
```

主程序如下:

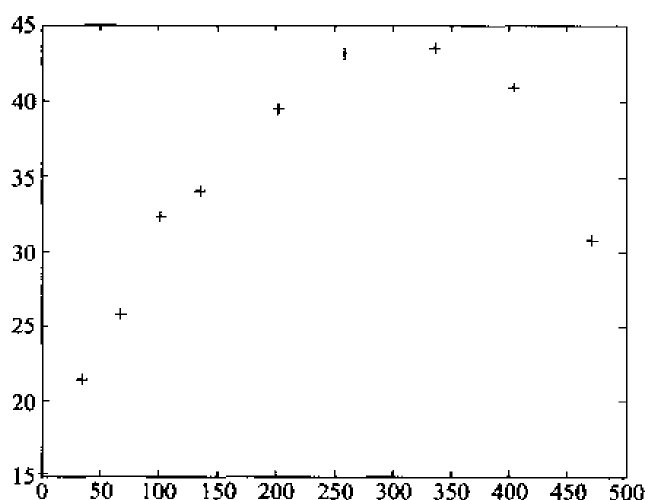
```
x1 =[470  285  470  470  470  100  100  470  100  100  100  285  285];
x2 =[300  80  300  80  80  190  80  190  300  300  80  300  190];
x3 =[10  10  120  120  10  10  65  65  54  120  120  10  120];
X =[x1'  x2'  x3'];
  y =[8.5500   3.7900   4.8200   0.0200   2.7500   14.3900
2.5400
4.3500   13.0000   8.5000   0.0500   11.3200   3.1300]';
    beta0 =[1,0.05,0.02,0.1,2]';
    [beta,r,J] =nlinfit(X,y,'volum2',beta0);
    beta
```

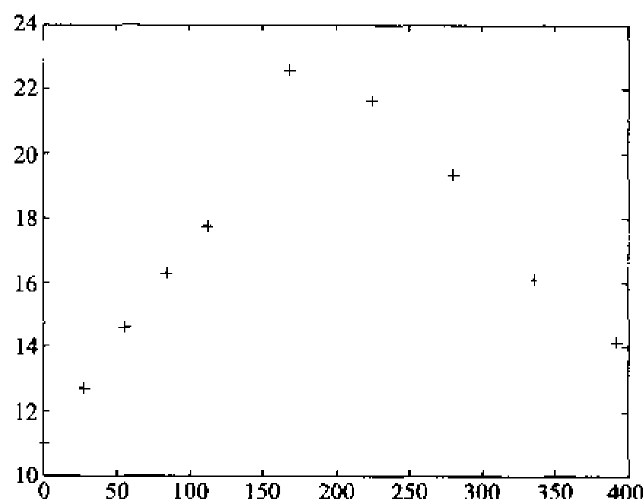
结果为:beta = 1.043 4 -0.009 6 -0.016 2 0.040 4 2.017 8

5. 解答:下面通过各变量的散点图来看它们的关系:

(1) 分析 N 与产量的关系:

```
N1 =[0   34   67   101   135   202   259   336   404   471];
Y1  =[15.1800   21.3600   25.7200   32.2900   34.0300   39.4500
    43.1500   43.4600   40.8300   30.7500];
plot(N1,Y1,'+')
N2 =[0   28   56   84   112   168   224   280   336   392];
Y12  =[11.0200   12.7000   14.5600   16.2700   17.7500   22.5900
    21.6300   19.3400   16.1200   14.1100];
plot(N2,Y12,'+')
```





结果:两种植物生产中,N 与产量都有先增加后减少的趋势,不能有太多的 N.

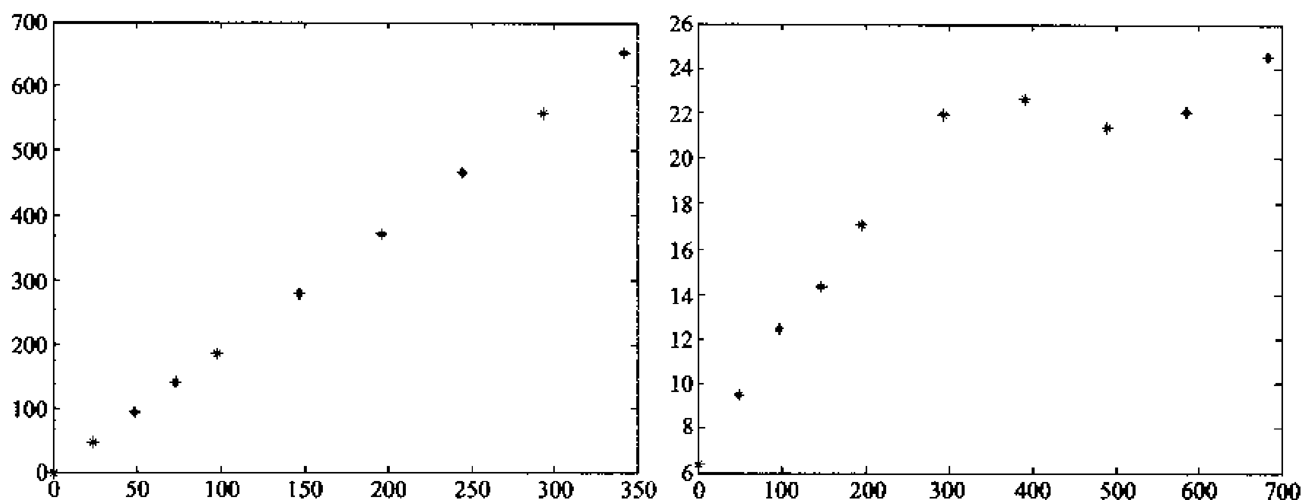
(2) 分析 P 与产量的关系:

```
P1 =[0   24   49   73   98   147   196   245   294   342];
Y2 =[0   47   93   140   186   279   372   465   558   651];
plot(P1,Y2,'*')
P2 =[0   49   98   147   196   294   391   489   587   685];
Y22 =[ 6.3900   9.4800   12.4600   14.3300   17.1000   21.9400
   22.6400   21.3400   22.0700   24.5300];
plot(P2,Y22,'*')
```

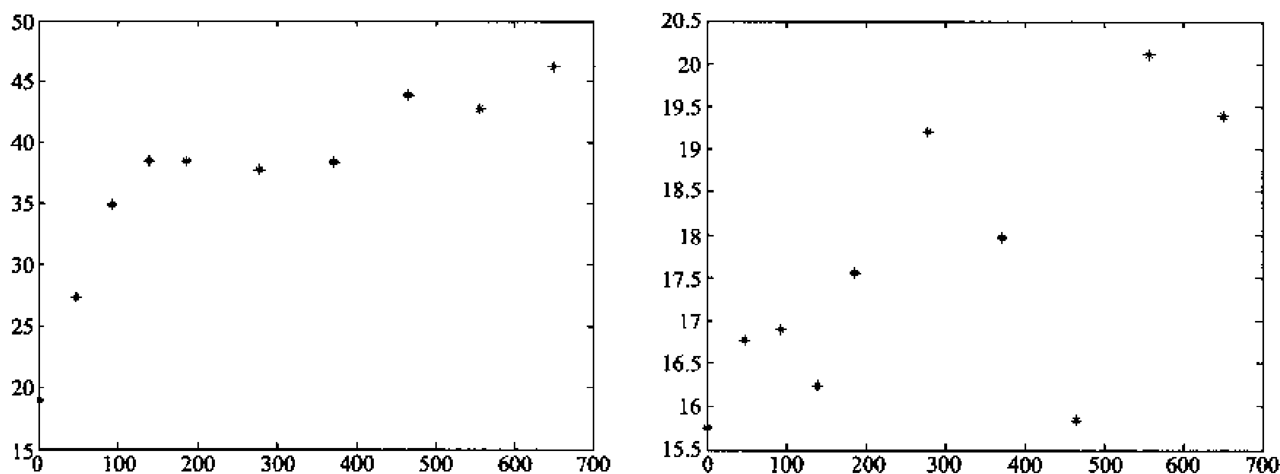
结果:土豆生产中,P 与产量有线性关系. 而生菜生产中,P 与产量有非线性关系. 但是它们的产量总的趋势是随 P 增加而增加.

(3) 分析 K 与产量的关系:

```
K1  =[ 0   47   93   140   186   279   372   465   558   651];
Y3 =[18.9800   27.3500   34.8600   38.5200   38.4400   37.7300
    38.4300   43.8700   42.7700   46.2200];
plot(K1,Y3,'*')
K2  =[ 0   47   93   140   186   279   372   465   558   651];
Y32 =[15.7500   16.7600   16.8900   16.2400   17.5600   19.2000
```




```
    17.9700    15.8400    20.1100    19.4000];
plot(K2,Y32,'*')
```



结果：土豆生产中，K与产量有非线性关系，产量总的趋势是随K增加而增加．而生菜生产中，K与产量几乎没有确定的函数关系．

17.5 习题答案

1. % 产生零件 A 的长度 y

```
r = rand (10) ;
y = [ ];
for i = 1 :10
    if 0 < r(i)&r(i) < 0 . 07
        y(i) = 5;
      elseif 0.07 < = r(i)&r(i) < 0.26
        y(i) = 6;
```

```
        elseif 0.26 <= r(i)&r(i) < 0.64
            y(i) = 7;
        elseif 0.64 <= r(i)&r(i) < 0.89
            y(i) = 8;
    else
        y(i) = 9;
    end
end
% 产生零件 B 的长度 y1
r1 = rand(10);
y1 = [];
for i = 1:10
    if 0 < r1(i)&r1(i) < 0.23
        y(i) = 14;
    elseif 0.23 <= r1(i)&r1(i) < 0.64
        y(i) = 15;
      elseif 0.64 <= r1(i)&r1(i) < 0.91
        y1(i) = 16;
        else
        y1(i) = 17;
    end
end
y2 = (sum(y) + sum(y1))/10    % 计算零件 C 的平均长度 y2
```

其中一次模拟结果：$y_2 = 18$.

2.
```
% 产生单件成本 y
r = rand;
     if 0 < r& r < 0.05
        y = 7;
     elseif 0.05 <= r& r < 0.2
        y = 8;
     elseif 0.2 <= r& r < 0.4
        y = 9;
     elseif 0.4 <= r& r < 0.7
        y = 10;
     elseif 0.7 <= r& r < 0.95
        y = 11;
     else
```

```
        y =12;
  end

N =450:10:950;  % 订购数
li = zeros(51,1);  % 利润
k = zeros(51,1);  % 记录最大的单价

for i =1:51

% 产生定价为 19 的销量 x1
r =rand;
  if 0 <r & r <0.05
      x1 =500;
    elseif 0.05 < =r & r <0.2
      x1 =600;
    elseif 0.2 < =r & r <0.6
      x1 =700;
    elseif 0.6 < =r & r <0.85
      x1 =800;
      else
      x1 =900;
  end
    % 产生定价为 20 的销量 x2
r =rand;
  if 0 <r & r <0.1
          x2 =500;
    elseif 0.1 < =r & r <0.3
          x2 =600;
    elseif 0.3 < =r & r <0.6
          x2 =700;
      elseif 0.6 < =r & r <0.9
          x2 =800;
    else
           x2 =900;
  end
    % 产生定价为 21 的销量 x3
r =rand;
  if 0 <r & r <0.2
```

```
    x3 =500;
  elseif 0.2 < =r & r <0.5
      x3 =600;
  elseif 0.5 < =r & r <0.85
        x3 =700;
  elseif 0.85 < =r & r <0.95
        x3 =800;
    else
      x3 =900;
  end

% 定价 jia
jia =[19,20,21];
% 利润 lir
lir =[0,0,0];

if N(i) >x1
   lir(1) =jia(1) *x1 +(N(i) -x1) *5 -N(i) *y;
  else
   lir(1) =jia(1) * N(i) -N(i) *y;
end
if N(i) >x2
    lir(2) =jia(2) *x2 +(N(i) -x2) *5 -N(i) *y;
  else
    lir(2) =jia(2) *N(i) -N(i) *y;
  end
  if N(i) >x3
   lir(3) =jia(3) *x3 +(N(i) -x3) *5 -N(i) *y;
  else
    lir(3) =jia(3) *N(i) -N(i) *y;
  end
    i
    lir'
    li(i) =max(lir);

  for j =1:3
    if lir(j) ==li(i)
      k(i) =j;  % 记录最大
```

```
    end
  end

  end
  lirun =max(li)     % 最大利润

  for i =1:51
    if li(i) ==lirun
      m =i;       % 总记录最大值
    end
  end
  m
  % 此时的定价
  if  k(m) ==1
    19
  elseif k(m) ==2
    20
  else
    21
    end
  dinggou =450 +10 * m     % 此时的订购数
```

其中一次模拟的部分结果:

```
i =40
ans =         4760         7560         7760(最大)
m =     40
ans =     21
dinggou =     850
```

3. 方案 1 程序如下:

```
money =[0,0,0,0];
s =0;
for i =1:4   % 四只电子管
    r =unifrnd(1000,2000);
    t =r;
while    t < =10000     % 模拟的电子管的总时间为 10000 小时
    money(i) =money(i) +30;
    r =unifrnd(1000,2000);
    t =t +r;
```

```
end
end
    s = sum(money)
```

其中一次模拟结果:s = 750

方案 2 程序如下:

```
money = 0;
r = unifrnd(1000,2000);
t = r;
while  t < = 10000    % 模拟的电子管的总时间为 10000 小时
    money = money + 200;
    r = unifrnd(1000,2000);
    t = t + r;
end
money
```

其中一次模拟结果:money = 1200

上述结果表明方案 1 较优.

4. 程序如下:

```
jia = [0.03,0.05,0.02];  % 定价 jia
N = 150:2:300;  % 订购报纸数量
lir = zeros(76,1);  % 总收入
for i = 1:76

% 产生销售量
r = rand
  if 0 < r & r < 0.1
      y = 200;
    elseif 0.1 < = r & r < 0.3
        y = 210;
    elseif 0.3 < = r & r < 0.7
        y = 220;
    elseif 0.7 < = r & r < 0.85
        y = 230;
    elseif 0.85 < = r & r < 0.95
        y = 240;
  else
      y = 250;
  end
  if N(i) > y
```

```
      lir(i) =jia(2) * y + (N(i) - y) * jia(3) - N(i) * jia(1);
    else
      lir(i) =jia(2) * N(i) - N(i) * jia(1);
  end
end
lir'
lirun = max(lir)    % 最大利润
    for i =1:76
      if lir(i) ==lirun
        m = i;    % 总记录最大值
      end
    end
m
dinggou =150 +2 * m    % 此时的订购报纸量
```

部分模拟结果：

```
lirun =    4.7400
m =    49
dinggou =    248
```

18.6 习题答案

1. MATLAB 程序如下：

```
T =[68 68 87 87 106 106 140 140];
P =1e +03 * [9.7981 13.321 9.0078 13.355 9.7918 14.277 9.6563 12.463];
K =[0.0848 0.0897 0.0762 0.0807 0.0696 0.0753 0.0611 0.0651];
cT =68:0.5:140;
cP =1e +03 * 9.0078:0.05:1e +03 * 14.277;
cK =griddata(T,P,K,99,1e +03 * 10.3,'cubic')    %  3 次插值
cKA -griddata(T,P,K,99,1e +03 * 10.3,'linear')   %  线性插值
```

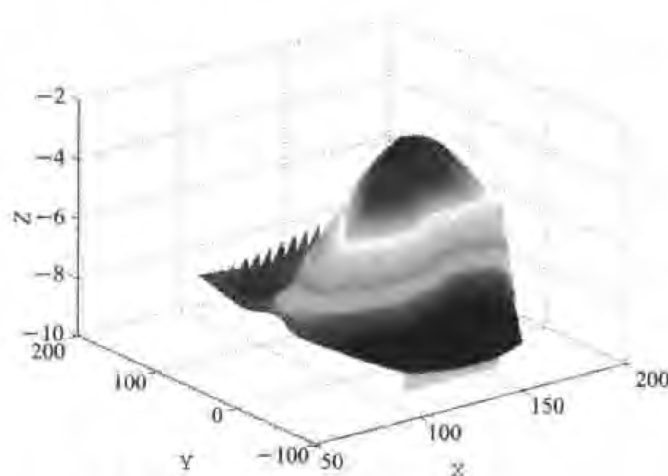
计算结果：利用 3 次插值得到的导热系数为 cK =0.072 4，利用线性插值得到的导热系数为 cKA =0.072 9.

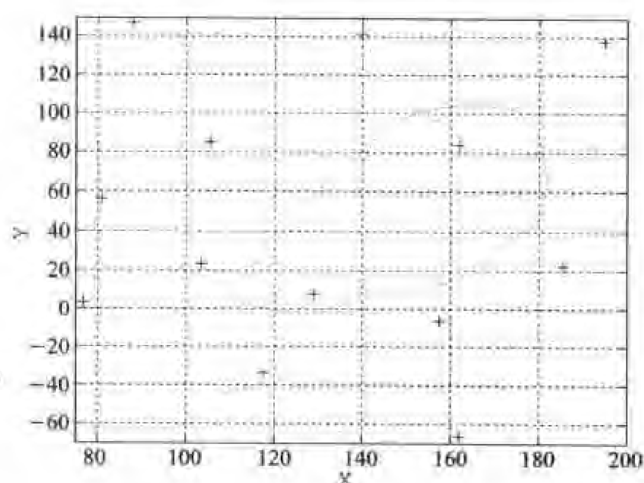
2. MATLAB 程序如下：

```
x =[129 140 103.5 88 185.5 195 105.5 157.5 107.5 77 81 162 162 117.5];
y =[7.5 141.5 23 147 22.5 137.5 85.5 -6.5 -81.3 56.5 -66.5 84 -33.5];
z =[ -4 -8 -6 -8 -6 -8 -8 -9 -9 -8 -8 -9 -4 -9];
cx =75:0.5:200;
cy = -70:0.5:150;
cz =griddata(x,y,z,cx,cy','cubic');
```

```
meshz(cx,cy,cz),rotate3d
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
% pause
figure(2),contour(cx,cy,cz,[-5 -5]);grid
hold on
plot(x,y,'+')
xlabel('X'),ylabel('Y')
```

计算结果如图：





3. MATLAB 程序如下：

```
x =1:0.5:10;
y3 =x.^3 -6 *x.^2 +5 *x -3;
z3 =rand(size(y3));
! RAND(SIZE(A))is the same size as A.
yy3 =y3 +z3;
A3 =polyfit(x,yy3,3)
y2 =x.^2 -6 *x +5;
z2 =rand(size(y2));
yy2 =y2 +z2;
A2 =polyfit(x,yy2,2)
y4 =3 *x.^4 -x.^3 -6 *x.^2 +5 *x -3;
z4 =rand(size(y4));
yy4 =y4 +z4;
A4 =polyfit(x,yy4,4)
```

计算结果:A3 =0.9974 -5.9532 4.7643 -2.0985

说明利用3次多项式拟合常数项差异较大.

A2 =1.0164 -6.1521 5.6457

说明利用2次多项式拟合常数项差异较大

```
A4 =2.9993     -0.9801     -6.1856     5.6450     -3.1509
```

说明利用 4 次多项式拟合一次项差异较大.

4. MATLAB 程序如下:

```
function f =dianya(x,t)
f =10 -(10 -x(1)) * exp( -t /x(2))          % x(1) =V0;x(2) =τ
```

主程序为:

```
t =[0.5 1 2 3 4 5 7 9];
V =[6.36 6.48 7.26 8.22 8.66 8.99 9.43 9.63];
x0 =[0.2,0.05];
x =lsqcurvefit('dianya',x0,t,V)   % x(1)代表 V0,x(2)代表 τ
f =dianya(x,t)
```

计算结果:x =5.5577　　3.5002　,即初始电压为 $V_0=5.5577$,充电常数为 $\tau=3.5002$.

5. MATLAB 程序如下:

```
x =[0 1 2 4 7 9];
f =[0 1.5 3.9 6.6 11.7 15.6];
A =polyfit(x,f,1)
z =polyval(A,x);
plot(x,f,'k +',x,z,'r')     % 作出数据点和拟合曲线的图形
```

计算结果:A =1.7085　　0.0008,　　即 $F=1.7085x$,说明当 $x\leqslant 9$ 时,大致服从胡克定律.当 $x\geqslant 9$ 后可以用如下二次函数来表示:

A = -0.0592　　2.3265　　-0.9803,即 $F=-0.0592x^2+2.3265x-0.9803$.

参考文献

[1] 应玫茜，魏权龄. 非线性规划及其理论. 北京：中国人民大学出版社，1994.
[2] 钱颂迪. 运筹学. 北京：清华大学出版社，1990.
[3] 马振华. 现代应用数学手册——运筹学与最优化理论卷. 北京：清华大学出版社，1998.
[4] 魏权龄，王日爽，徐兵. 数学规划议论. 北京：北京航空航天大学出版社，1991.
[5] 席少霖，赵凤治. 最优化计算方法. 上海：上海科学技术出版社，1983.
[6] 薛家庆. 最优化原理与方法. 北京：冶金工业出版社，1983.
[7] S. P. 勃雷达兰，等. 应用数学规划. 翟立林等 译. 北京：机械工业出版社，1983.
[8] 王德人. 非线性方程组解法与最优化方法. 北京：人民教育出版社，1979.
[9] 管梅谷，郑汉鼎. 线性规划. 山东：山东师范大学出版社，1986.
[10] 何叔俭，戴家幸. 线性规划与网络技术. 上海：华东化工学院出版社，1989.
[11] 奚梅成. 数值分析方法. 合肥：中国科学技术大学出版社，1994.
[12] 黄友谦. 数值试验. 北京：高等教育出版社，1989.
[13] 金福临，阮炯，黄振勋. 应用常微分方程. 上海：复旦大学出版社，1991.
[14] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993.
[15] 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京：人民教育出版社，1981.
[16] 徐全智，杨晋浩. 数学建模入门. 成都：电子科技大学出版社，1996.
[17] 孙淑玲，许龙. 组合数学引论. 合肥：中国科学技术大学出版社，1999.
[18] 王元元，王庆瑞，等. 组合数学理论与题解. 上海：上海科学技术文献出版社，1989.
[19] [美]C. L. Liu. 组合数学导论. 魏万迪译. 成都：四川大学出版社，1987.
[20] Bondy J A. , USR Murty. Graph Theory with Applications. New York：Academic Press, 1976.
[21] 费培之. 图和网络及其应用. 成都：四川大学出版社，1996.
[22] 林同曾. 运筹学. 北京：机械工业出版社，1986.
[23] 龚劬. 图论与网络的最优化算法. 重庆：重庆大学出版社，1995.
[24] 卢开澄，卢华明. 图论及其应用. 北京：清华大学出版社，1996.
[25] 唐策善，梁维发. 并行图论算法. 合肥：中国科学技术大学出版社，1991.
[26] 张野鹏. 作战模拟基础. 北京：解放军出版社，1994.
[27] 郭绍僖，关亚骥，陆学华. 计算机模拟. 北京：中国矿业大学出版社，1989.
[28] 马逢时，何良才，余明书，范金城. 应用概率统计. 天津：天津大学出版社，1984.
[29] 刘次华，万建平. 概率论与数理统计. 北京：高等教育出版社；施普林格出版社，1999.
[30] 王明慈，沈恒范. 概率论与数理统计. 北京：高等教育出版社，1998.
[31] 萧树铁. 数学实验. 北京：高等教育出版社，1999.
[32] 赵选民，等. 数理统计. 西安：西北工业大学出版社，1999.

[33] 汪荣鑫. 数理统计. 西安: 西安交通大学出版社, 1996.
[34] 孙荣恒. 应用数理统计. 北京: 科学出版社, 1998.
[35] 吴翊, 李永乐, 胡庆军. 应用数理统计. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.
[36] 黄有谦. 计算方法. 北京: 高等教育出版社, 1994.
[37] 张得荣, 王新民, 高安民. 计算方法与算法语言. 北京: 高等教育出版社, 1981.
[38] 舒贤林, 徐志才. 图论基础及其应用. 北京: 北京邮电学院出版社, 1988.
[39] 苏金明, 阮沈勇. MATLAB 6.1 实用指南. 北京: 电子工业出版社, 2002.
[40] 曹汝成. 组合数学. 广州: 华南理工大学出版社, 2003.
[41] 匡正. 组合数学习题精解. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2005.